Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLIX Egzamin dla Aktuariuszy z 6 kwietnia 2009 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 6 kwietnia 2009 r.

1. Niech $m(x)$ oznacza medianę dalszego trwania życia (x) tzn. medianę zmiennej losowej $T(x)$. Dana jest funkcja natężenia umierania :

$$\mu_x = 0{,}01 \cdot 1{,}02^x \quad \text{dla } x > 0.$$

Obliczyć $m(33)$.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 21

(B) 24

(C) 27

(D) 30

(E) 33.

2. Rozważamy wyjściowy symbol $A_{x:\overline{m|}}^{\ \ 1}$ oznaczający składkę jednorazową netto za m-letnie ubezpieczenie na dożycie dla (x). Załóżmy, że małe liczby Δx oraz Δm zostały tak dobrane, że

$$A_{x+\Delta x:\overline{m+\Delta m|}}^{\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1} = A_{x:\overline{m|}}^{\ \ 1}.$$

Obliczyć wartość przybliżoną:

$$\Delta m / \Delta x.$$

Dane są:
$\delta = 0.03$, $\mu_x = 0{,}01$, $\mu_{x+m} = 0{,}015$.

Wybierz odpowiedź najbliższą.

(A) $-0{,}11$

(B) $-0{,}15$

(C) $-0{,}19$

(D) $-0{,}23$

(E) $-0{,}27$.

3. Rozważamy populację wykładniczą z natężeniem umierania:

$$\mu_x = const = \mu > 0.$$

Wybrany z niej (x) kupuje ubezpieczenie ciągłe na życie odroczone o $m > 0$ lat. Płaci do końca życia ciągłą rentę życiową składek netto z odpowiednio dobraną stałą intensywnością $\bar{P}$. Jeśli umrze w ciągu najbliższych m lat to żadne świadczenie nie będzie wypłacone. Natomiast, gdy umrze później to zostanie wypłacone $1\ zł$ w chwili jego śmierci.

Niech $\delta > 0$ oznacza poziom technicznej intensywności oprocentowania użytej do obliczenia składek i rezerw.

Intensywność składki oszczędnościowej po $2m$ latach $\pi^s(2m)$ wynosi wówczas:

(A)

$$\pi^s(2m) = -\frac{\mu\delta}{\mu+\delta}\left(1 - e^{-m(\mu+\delta)}\right),$$

(B)

$$\pi^s(2m) = -\frac{\mu}{\mu+\delta}\left(1 - e^{-m(\mu+\delta)}\right),$$

(C)

$$\pi^s(2m) = -\frac{\delta}{\mu+\delta}\left(1 - e^{-m(\mu+\delta)}\right),$$

(D)

$$\pi^s(2m) = -\left(1 - e^{-m(\mu+\delta)}\right),$$

(E)

$$\pi^s(2m) = -\frac{\mu-\delta}{\mu+\delta}\left(1 - e^{-m(\mu+\delta)}\right).$$

4. Rozważamy ubezpieczenie ciągłe ogólnego typu, które ma tę własność, że dla każdego $t > 0$ zachodzi równość

$$\pi^s(t) = \pi^r(t).$$

Po lewej stronie mamy intensywność składki oszczędnościowej a po prawej stronie mamy intensywność składki na ryzyko. Wówczas bieżące poziomy: rezerwy $V(t)$, świadczenia śmiertelnego $c(t)$ oraz intensywności składki netto $\pi(t)$ powiązane są zależnością:

(A)

$$V(t) = c(t) - \frac{\pi(t)}{\mu_{x+t}},$$

(B)

$$V(t) = c(t) - \frac{2\pi(t)}{\mu_{x+t}},$$

(C)

$$V(t) = c(t) + \frac{\pi(t)}{\mu_{x+t}},$$

(D)

$$V(t) = c(t) - \frac{\pi(t)}{2\mu_{x+t}},$$

(E)

$$V(t) = c(t) + \frac{\pi(t)}{2\mu_{x+t}}.$$

5. Rozważamy ubezpieczenie bezterminowe na życie ciągłe dla (30), wybranego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 110$. Wypłaci ono 1 $zł$ w chwili jego śmierci. Składka jednorazowa SJ, którą zapłaci ubezpieczony w momencie zawarcia umowy ubezpieczeniowej, została skalkulowana jako *wartość oczekiwana wartości obecnej wypłaty pod warunkiem, że ubezpieczony umrze wcześniej niż przeciętnie.* Obliczyć prawdopodobieństwo:
$\Pr\left(v^{T(30)} < SJ\right)$.
W powyższym wzorze v oznacza techniczny roczny czynnik dyskontujący, odpowiadający technicznej intensywności oprocentowania $\delta = 0{,}02$.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A)

$\Pr\left(v^{T(30)} < SJ\right) = 0{,}726579,$

(B)

$\Pr\left(v^{T(30)} < SJ\right) = 0{,}746579,$

(C)

$\Pr\left(v^{T(30)} < SJ\right) = 0{,}766579,$

(D)

$\Pr\left(v^{T(30)} < SJ\right) = 0{,}786579,$

(E)

$\Pr\left(v^{T(30)} < SJ\right) = 0{,}806579.$

6. Rozważamy ubezpieczenie bezterminowe dla (x), które wypłaci 1 $zł$ na koniec roku śmierci. Składki opłacane są za pomocą renty życiowej składek corocznych w stałej wysokości netto P_x. Wiadomo, że dla pewnego całkowitego $k > 0$ zachodzi:
${}_kV = 0{,}60$, ${}_{k+2}V = 0{,}64$, $p_{x+k} = 0{,}92$, $p_{x+k+1} = 0{,}88$, $i = 4\%$.
Obliczyć P_x .

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 2 gr ,

(B) 3 gr ,

(C) 4 gr ,

(D) 5 gr ,

(E) 6 gr .

7. Mąż (30) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_m = 100$, natomiast żona (25) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_k = 120$. Rozpatrujemy ubezpieczenie bezterminowe ciągłe dla tej pary, które wypłaci 1 $zł$ w chwili pierwszej śmierci. Składka za to ubezpieczenie będzie płacona aż do pierwszej śmierci za pomocą renty życiowej ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością netto $\bar{P}$. Obliczyć rezerwę składek netto $V(50)$ po 50 latach od momentu wystawienia polisy.
Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0{,}05$. Zakładamy ponadto, że $T(30)$ oraz $T(25)$ są niezależne.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 0,33 zł

(B) 0,38 zł

(C) 0,43 zł

(D) 0,48 zł

(E) 0,53 zł.

8. (x) wybrano z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega > 0$. Natomiast (y) wybrano niezależnie z populacji wykładniczej z funkcją natężenia wymierania $\mu_{y+t} = const = \mu > 0$. Wybrane osoby mają przed sobą przeciętnie tyle samo życia. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że
$T(x) > T(y)$.
Zakładamy, że $T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A)
$\Pr(T(x) > T(y)) = 0{,}49$

(B)
$\Pr(T(x) > T(y)) = 0{,}53$

(C)
$\Pr(T(x) > T(y)) = 0{,}57$

(D)
$\Pr(T(x) > T(y)) = 0{,}61$

(E)
$\Pr(T(x) > T(y)) = 0{,}65$.

9. Rozważamy model dwuopcyjny (multiple decrement model), przy czym $\mu_{1,x+t} = \frac{1}{\omega_1 - t}$ dla $0 < t < \omega_1$ oraz $\mu_{2,x+t} = \frac{1}{\omega_2 - t}$ dla $0 < t < \omega_2$, przy czym zakładamy, że $\omega_1 < \omega_2$. Obliczyć stosunek ω_1/ω_2 dla którego największe jest prawdopodobieństwo
$\Pr(T > E(T)|J = 1)$.

Wybierz wartość najbliższą.

(A) 0,19

(B) 0,29

(C) 0,39

(D) 0,49

(E) 0,59.

10. Rozważamy ubezpieczenie emerytalne dla (25). Polega ono na tym, że w ciągu najbliższych 35 lat będzie on płacił regularną coroczną składkę netto w wysokości P. Po dożyciu wieku 60 lat zacznie on otrzymywać emeryturę dożywotnią w wysokości 1 zł na początku każdego roku. Niech L oznacza wartość obecną straty ubezpieczyciela na moment wystawienia polisy. Obliczyć $Var(L)$.

Dane są:

$i = 6\%$, ${}_{35}p_{25} = 0{,}856044$, $A_{25} = 0{,}0816496$, $A_{60} = 0{,}3691310$,

${}^2A_{25} = 0{,}0187472$, ${}^2A_{60} = 0{,}1774113$.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A)

$Var(L) = 0{,}54$

(B)

$Var(L) = 0{,}50$

(C)

$Var(L) = 0{,}46$

(D)

$Var(L) = 0{,}42$

(E)

$Var(L) = 0{,}38$.

XLIX Egzamin dla Aktuariuszy z 6 kwietnia 2009 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	A	
4	D	
5	C	
6	B	
7	D	
8	C	
9	B	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.