Zadanie 1.

Rzucono niezależnie 80 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, a Y liczbę orłów w pierwszych 20 rzutach. Wtedy współczynnik korelacji $\rho(X,Y)$ jest równy

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) 1

Zadanie 2.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładów prawdopodobieństwa o gęstościach

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{3} x^3 \exp(-2x) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad f_Y(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} x^4 \exp(-2x) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases}$$

Niech $U = \frac{X}{X+Y}$ i $V=X+Y$.

Wtedy

(A) $E(U) = \frac{4}{5}$

(B) $E(U \mid V) = \frac{4}{9}$

(C) $E(U \mid V) = \frac{2}{V}$

(D) $E(V \mid U) = \frac{2}{U}$

(E) $E(V) = \frac{7}{2}$

Zadanie 3.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,\ I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots, N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ mają rozkład o wartości oczekiwanej 2 i wariancji 1. Zmienne $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ mają rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Zmienna N ma rozkład ujemny dwumianowy $P(N=n) = \dfrac{\Gamma(2+n)}{n!}\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$.

Niech $S_N = \begin{cases} 0 & gdy \;\; N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} I_i X_i & gdy \;\; N > 0 \end{cases}$.

Wtedy $Var(S_N)$ jest równa

(A) $\dfrac{8}{9}$

(B) $\dfrac{4}{9}$

(C) $\dfrac{4}{3}$

(D) $\dfrac{10}{9}$

(E) $\dfrac{17}{18}$

Zadanie 4.

W urnie znajduje się nieznana liczba N kul, wśród których jest 7 kul czerwonych. Losujemy 6 kul i zliczamy X liczbę kul czerwonych. Weryfikujemy hipotezę H: N=15 przy alternatywie, że K: N>15. Przy poziomie istotności $\frac{12}{143}$ test jednostajnie najmocniejszy odrzuca hipotezę H, gdy

(A) $X < 1$

(B) $X < 2$

(C) $X < 3$

(D) $X > 3$

(E) $X > 4$

Zadanie 5.

Na podstawie prostej próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ testowano hipotezę $H_0 : \sigma^2 = 2$ przy alternatywie $H_1 : \sigma^2 = 0{,}5$, gdzie σ^2 jest parametrem odpowiadającym za wariancję zmiennej losowej X_i.

Jeżeli dodatkowo wiadomo, że zmienne losowe X_i mają rozkład zadany gęstością

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & gdy \ \ x > 0 \\ 0 & gdy \ \ \mathrm{x} \leq 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, to przy poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, obszar krytyczny testu opartego na ilorazie wiarogodności jest równy

(A) $\sum_{i=1}^{10} X_i < 13{,}25$

(B) $\sum_{i=1}^{10} X_i > 27{,}88$

(C) $\sum_{i=1}^{10} X_i > 9{,}15$

(D) $\sum_{i=1}^{10} X_i > 15{,}71$

(E) $\sum_{i=1}^{10} X_i < 5{,}43$

Zadanie 6.

Dysponujemy dwiema urnami: A i B. W urnie A są dwie kule białe i trzy czarne, w urnie B są cztery kule białe i jedna czarna. Wykonujemy trzy etapowe doświadczenie:
1 etap: losujemy urnę (wylosowanie każdej urny jest jednakowo prawdopodobne);
2 etap: z wylosowanej urny ciągniemy 2 kule bez zwracania, a następnie wrzucamy do tej urny 2 kule białe i 2 czarne;
3 etap: z urny, do której wrzuciliśmy kule, losujemy jedną kulę.
Okazało się, że wylosowana w trzecim etapie kula jest biała.
Obliczyć prawdopodobieństwo, że w drugim etapie wylosowano dwie kule jednego koloru.

(A) 0,2

(B) 0,4

(C) 0,5

(D) 0,6

(E) 0,3

Zadanie 7.

Niech $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n > 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(1+x)^4} & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; \mathrm{x} \le 0 \end{cases}$$

Niech $U = \min\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Wtedy $E(U \mid X_0 = 1)$ jest równa

(A) $\dfrac{1}{3n+2}\left(1 - \dfrac{1}{2^{3n+2}}\right)$

(B) $\dfrac{1}{3n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{3n-1}}\right) - \dfrac{1}{2^{3n}}$

(C) $\dfrac{1}{(3n-1)2^{3n-1}}$

(D) $\dfrac{1}{2^{3n}} + \dfrac{1}{3n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{3n-1}}\right)$

(E) $\dfrac{1}{3n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{3n-1}}\right)$

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 1 i nieznanej wariancji σ^2. Rozważamy rodzinę estymatorów parametru σ postaci $S_a = a\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - 1\right|$, przy czym a jest liczbą dodatnią. Wyznaczyć a^*, tak by estymator S_{a^*} był estymatorem o najmniejszym błędzie średniokwadratowym wśród estymatorów postaci S_a.

(A) $a^* = \dfrac{1}{n}$

(B) $a^* = \dfrac{1}{n-1}$

(C) $a^* = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{n + 2\pi - 1}$

(D) $a^* = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2n + \pi - 2}$

(E) $a^* = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{2n + \pi - 2}$

Zadanie 9.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale (a,b), $a < b$ i $n > 2$. Rozważamy estymator parametru $b - a$ postaci

$$c\left(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} - \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\right),$$

gdzie c dobrano tak, aby był to estymator nieobciążony.
Wariancja tego estymatora jest równa

A) $\dfrac{2(b-a)^2}{(n+1)(n-1)}$

(B) $\dfrac{2n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(C) $\dfrac{2n(b-a)^2}{(n-1)^2(n+2)}$

(D) $\dfrac{2(b-a)^2}{(n+2)(n-1)}$

(E) $\dfrac{2(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}$

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & gdy \;\; x \in (0,1) \\ 0 & gdy \;\; \mathrm{x} \notin (0,1) \end{cases},$$

gdzie $\theta>0$ jest nieznanym parametrem. Wyznaczamy przedział ufności dla parametru θ postaci

$$\left[c\hat{\theta}, d\hat{\theta}\right],$$

gdzie $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$ jest estymatorem największej wiarogodności, a stałe c i d są dobrane tak, aby $P_\theta\left(\theta < c\hat{\theta}\right) = P_\theta\left(\theta > d\hat{\theta}\right) = 0{,}05$. Wyznaczyć c i d.

(A) $c = 0{,}54$ i $d = 1{,}57$

(B) $c = 0{,}39$ i $d = 1{,}83$

(C) $c = 0{,}11$ i $d = 1{,}11$

(D) $c = 0{,}23$ i $d = 2{,}21$

(E) $c = 0{,}27$ i $d = 1{,}29$

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 kwietnia 2009 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....
~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	B	
3	C	
4	B	
5	A	
6	C	
7	E	
8	D	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.