Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

L Egzamin dla Aktuariuszy z 5 października 2009 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Niech D oznacza sumę wartości rent malejących $(Da)_{\overline{n|}}$ tzn. $D = \sum_{n=1}^{10} (Da)_{\overline{n|}}$, natomiast I sumę wartości rent rosnących $(Ia)_{\overline{n|}}$ tj. $I = \sum_{n=1}^{10} (Ia)_{\overline{n|}}$.

Który z poniższych wzorów wyraża różnicę $D - I$?

(i) $$\frac{45 \cdot i - 20 + (2 \cdot v + 1) \cdot \ddot{a}_{\overline{10|}} - 10 \cdot v^{10}}{i^2}$$

(ii) $$\frac{45 \cdot i - 20 + (3 + 2 \cdot i) \cdot a_{\overline{10|}} - 10 \cdot v^{10}}{i^2}$$

(iii) $$\frac{45 \cdot i - 10 + a_{\overline{10|}} + 2 \cdot \ddot{a}_{\overline{10|}} - 20 \cdot v^{10}}{i^2}$$

(iv) $$\frac{45 \cdot i - 18 + 3 \cdot a_{\overline{10|}} - 12 \cdot v^{10}}{i^2}$$

Odpowiedź:

A) tylko (ii)

B) tylko (ii) i (iii)

C) tylko (iii)

D) tylko (ii) i (iv)

E) tylko (i) i (iv)

2. Ubezpieczenie na życie i dożycie posiada opcję wypłaty świadczenia, w przypadku dożycia do określonego wieku, w formie renty pewnej 25 letniej, płatnej w równych ratach na koniec kolejnych lat. Do kalkulacji raty renty oraz obliczania wysokości rezerwy technicznej (rezerwa techniczna to aktualna wartość renty ang. *present value*) stosowana jest stopa procentowa 3,5% (tzw. stopa techniczna).

Ubezpieczony, któremu po dożyciu do końca okresu ubezpieczenia należy się świadczenie jednorazowe w wysokości 200 000 PLN, wybiera opcję wypłaty świadczenia w formie renty, na co przeznacza całą powyższą kwotę.

Umowa ubezpieczenia zakłada, że zakład ubezpieczeń dzieli się z ubezpieczonym zyskiem uzyskanym przy lokowaniu aktywów stanowiących pokrycie rezerw technicznych. Oznacza to, że przy każdej płatności renty zakład wypłaci ubezpieczonemu 90% zysku osiągniętego ponad stopę techniczną w ostatnim roku (liczonego od kwoty rezerwy technicznej na początku roku).

Zakładając, że ubezpieczony dożyje do końca okresu wypłacania renty, obliczyć ile wyniesie suma wszystkich wypłat dodatkowych z tytułu udziału w zysku, jeżeli stopy zwrotu z aktywów stanowiących pokrycie rezerw będą następujące:

- 6% w latach 1 - 5,
- 5% w latach 6 - 10,
- 4% w latach 11 - 15,
- 3,5% w latach 16 - 20,
- 4,5% w latach 21 - 25.

Podaj najbliższą wartość:

A) 36 223 PLN

B) 36 413 PLN

C) 36 653 PLN

D) 36 813 PLN

E) 40 123 PLN

3. Renta nieskończona wypłaca kwotę $\frac{1}{k(k+1)}$ na koniec lat k = 1, 2, …. Rozważmy N takich jednakowych rent. Ile co najmniej powinno wynosić N, aby suma wartości obecnych tych rent była dwukrotnie wyższa od wartości obecnej renty nieskończonej wypłacającej kwotę $\frac{1}{k}$ na koniec lat k = 1, 2, …? Do obliczeń przyjmij czynnik dyskontujący v = 0.9. Odpowiedź:

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

4. Inwestor działający na rynku opcyjnym ma w momencie t do dyspozycji następujące cztery portfele:

Portfel V_1: europejska opcja kupna warta c_t z ceną wykonania X i momentem wygaśnięcia T ($t \leq T$) wystawiona na akcję o cenie S_t płacącą roczną stopę dywidendy $q \geq 0$; oraz kwota X zainwestowana w instrument wolny od ryzyka dający rocznie stopę zwrotu $r \geq 0$.

Portfel V_2: $e^{-q(T-t)}$ jednostek akcji o cenie S_t płącącej roczną stopę dywidendy $q \geq 0$, z których dywidenda jest reinwestowana w zakup kolejnych jednostek tej akcji; oraz wystawiona na tą akcję amerykańska opcja sprzedaży warta P_t z ceną wykonania X i momentem wygaśnięcia T ($t \leq T$).

Portfel V_3: amerykańska opcja kupna warta C_t z ceną wykonania X i momentem wygaśnięcia T ($t \leq T$) wystawiona na akcję o cenie S_t płącącą roczną stopę dywidendy $q \geq 0$; oraz kwota $Xe^{-r(T-t)}$ zainwestowana w instrument wolny od ryzyka dający rocznie stopę zwrotu $r \geq 0$.

Portfel V_4: jedna akcja o cenie S_t płącąca roczną stopę dywidendy $q \geq 0$, z której dywidenda jest reinwestowana w zakup kolejnych jednostek tej akcji; oraz wystawiona na tą akcję europejska opcja sprzedaży warta p_t z ceną wykonania X i momentem wygaśnięcia T ($t \leq T$).

Przyjmując kapitalizację ciągłą oraz zakładając, że inwestor działa na rynku doskonałym, na którym obowiązuje zasada braku arbitrażu cenowego, wskaż prawdziwe oszacowanie:

A) $S_t e^{-q(T-t)} - X > C_t - P_t$ i $C_t - P_t > S_t - Xe^{-r(T-t)}$

B) $S_t e^{-q(T-t)} - X \leq C_t - P_t$ i $C_t - P_t > S_t - Xe^{-r(T-t)}$

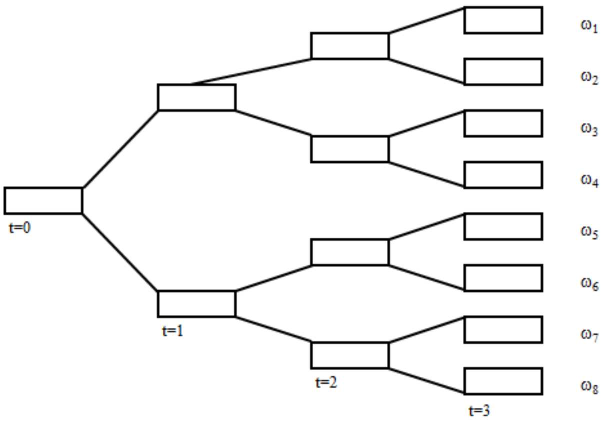
C) $P_t < c_t - S_t e^{-q(T-t)} + Xe^{-r(T-t)}$

D) $max\left(Xe^{-r(T-t)} - S_t e^{-q(T-t)}, 0\right) > P_t$ i $max\left(S_t e^{-q(T-t)} - Xe^{-r(T-t)}, 0\right) > c_t$

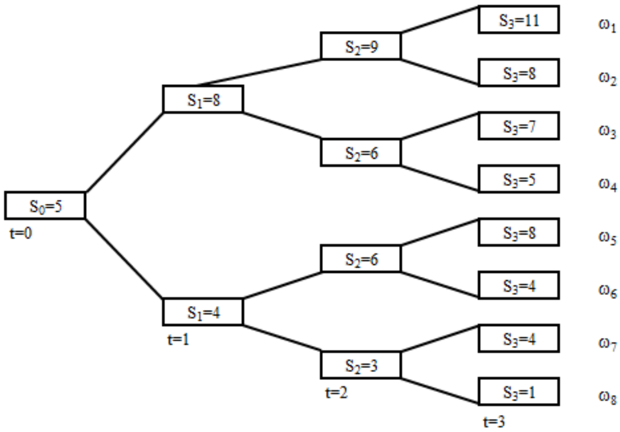
E) $S_t e^{-q(T-t)} - X \leq C_t - P_t$ i $C_t - P_t \leq S_t - Xe^{-r(T-t)}$

<u>*Wskazówka*</u>: zbadaj relację miedzy wartością portfela V_1 a wartością portfela V_2 oraz relację między wartością portfela V_3 a wartością portfela V_4.

5. Zbiór scenariuszy przedstawiający model pewnego rynku finansowego w czasie $t = 0, 1, 2, 3$ opisuje Drzewko 1.



Drzewko 1.



Drzewko 2.

Na przykład, scenariusz ω_1 oznacza wzrosty rynku we wszystkich krokach. Wskazać liczbę prawdziwych stwierdzeń wśród następujących:

a) Rozpatrzmy algebrę F_1 określoną jako $F_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$. Jeżeli cena W_1 pewnej akcji w $t = 1$ wynosi 72 dla $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ i 84 dla $\omega \in \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ to W_1 jest F_1-mierzalna.

b) Jeżeli cena W_1 tej samej akcji w $t = 1$ wynosi 72 dla $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$ i 84 dla $\omega \in \{\omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ to W_1 jest F_1-mierzalna.

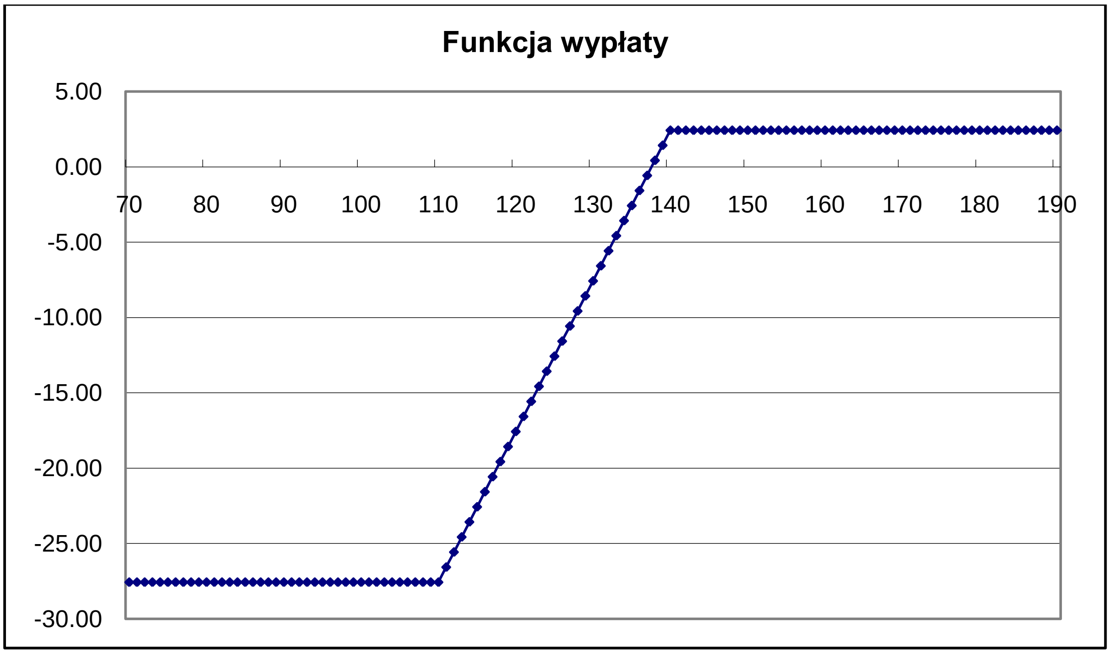
c) Rozpatrzmy teraz algebrę F_2, generowaną przez następujący podział zdarzeń elementarnych $\{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$. Niech ceny pewnej akcji S będą opisane przez Drzewko 2. Wówczas cena S_2 jest F_1-mierzalna i F_2-mierzalna, ale nie jest F_3-mierzalna.

d) S_2 jest F_3-mierzalna, gdzie $F_3 = 2^{\Omega}$, $\Omega = \{\omega_i\}$, $i = 1, \ldots, 8$, zaś 2^{Ω} to zbiór wszystkich możliwych zdarzeń.

Odpowiedź:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

6. Inwestor stosuje strategię typu *spread byka* (*bull spread*) zbudowaną w oparciu o europejskie opcje kupna o okresie wykonania 5 lat. Uwzględniająca koszty transakcji wypłata, w zależności od ceny S_5 instrumentu bazowego w momencie wykonania, przedstawiona jest na rysunku:



Obecne (moment $t = 0$) kwotowania europejskich opcji sprzedaży wystawionych na instrument bazowy o obecnej cenie $S_0 = 125$ i okresie wykonania 5 lat, w zależności od ceny wykonania X przedstawione są w tabeli:

Cena wykonania X	Cena opcji sprzedaży
110	0.13
140	1.84
150	3.36

Zmienność σ (*volatility*) instrumentu bazowego jest równa 10%, wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi 7%.

Obecny koszt, jaki poniósł inwestor przyjmując strategię *byka* wynosi (podaj najbliższą wartość):

A) 5.20

B) 19.43

C) 24.96

D) 28.18

E) 47.61

7. Kredyt w wysokości 300 000 PLN ma być spłacany przez okres 25 lat w następujący sposób:

- przez pierwsze 5 lat na końcu każdego roku spłacane będzie jedynie 40% kwoty odsetek od oryginalnego (nominalnego) zadłużenia,
- przez następne 5 lat na końcu każdego roku spłacane będą jedynie odsetki od kwoty bieżącego zadłużenia,
- przez kolejne 5 lat na końcu każdego roku spłacany będzie jedynie kapitał przy użyciu równych rat, przy czym łącznie w tym okresie zapłacone zostanie 30% nominalnej kwoty zadłużenia,
- przez ostatnie 10 lat na końcu każdego roku kredyt spłacany będzie przy użyciu równych rat w wysokości R.

Oblicz wartość R, jeżeli wiadomo, że w pierwszych 10 latach stopa procentowa wyniesie 6%, w następnych 5 latach 7%, a w ostatnich 10 latach 8%.

Podaj najbliższą wartość:

A) 60 005 PLN
B) 60 205 PLN
C) 60 405 PLN
D) 60 605 PLN
E) 60 805 PLN

8. Firma inwestycyjna oferuje umowy długoterminowego oszczędzania na okres 15 lat. Umowa gwarantuje inwestorowi oprocentowanie w wysokości 6% od wpłat podstawowych, od momentu dokonania wpłaty do końca umowy, oraz oprocentowanie 4% od wypracowanej nadwyżki wynikającej z uzyskania przychodów z lokowania wpłat podstawowych ponad stopę 6%, od momentu uzyskania nadwyżki do końca okresu umowy.

Inwestor podpisując umowę zadeklarował wysokość rocznej wpłaty płatnej na początku każdego roku trwania umowy (wpłaty podstawowej) na poziomie 2 000 PLN.

Wiedząc, że w okresie 5 pierwszych lat obowiązywania umowy stopa zwrotu z inwestowania środków pochodzących z wpłat podstawowych wynosiła 8%, oblicz, jaka co najmniej kwota zostanie wypłacona inwestorowi po zakończeniu umowy.

Podaj najbliższą wartość:

A) 50 060 PLN
B) 50 160 PLN
C) 50 260 PLN
D) 50 360 PLN
E) 50 460 PLN

9. Rozważmy następujący, dyskretny model struktury terminowej stóp procentowych:

- W chwili $t = 0$ krzywa stóp procentowych zadana jest funkcją: $r(0, T) = 3\%$, $T = 1, 2, 3, ...$, gdzie $r(0, T)$ oznacza T-letnią stopę *spot* w ujęciu rocznym w chwili 0.
- W chwilach $t = 1, 2, 3, ...$ krzywa stóp procentowych $r(t, T)$ zadana jest funkcją: $r(t, T) = 3\% + X$, $T = 1, 2, 3, ...$, gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-3\%, 3\%]$. Funkcja $r(t, T)$ oznacza T-letnią stopę *spot* w ujęciu rocznym w chwili t.

W chwili $t = 0$ emitowana jest obligacja zerokuponowa o nominale 1 000, zapadająca w chwili $t = 3$. Niech $P(t)$ oznacza cenę tej obligacji w chwili t.

Ceny obligacji w chwilach $t = 0$ i $t = 1$, wyznaczone przy pomocy opisanego modelu stopy procentowej wynoszą (podać najbliższą odpowiedź):

A) $P(0) = 915.14$, $P(1) = 942.60$
B) $P(0) = 916.70$, $P(1) = 943.40$
C) $P(0) = 915.14$, $P(1) = 943.40$
D) $P(0) = 916.70$, $P(1) = 942.60$
E) $P(0) = 915.14$, $P(1) = 970.87$

10. Do wyceny obligacji korporacyjnych wykorzystywany jest model oparty o rating kredytowy emitenta. Model oparty jest o następujące założenia:

- Możliwe są dwa ratingi kredytowe A lub B.
- Dana jest następującą macierz prawdopodobieństw przejścia pomiędzy ratingami w jednym kroku:

$$\begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

- Krok modelu jest roczny.
- Jeśli na początku roku $k, k = 1, 2, \ldots$, emitent obligacji posiada rating kredytowy A, to do dyskontowania przepływów pieniężnych z wyemitowanej przez niego obligacji występujących w tym roku używamy czynnika dyskontującego $v_A = 0.95$. Jeżeli zaś na początku roku k emitent posiada rating kredytowy B, to analogiczny czynnik dyskontujący v_B wynosi 0.90.

Rozważmy obligację korporacyjną wyemitowaną na początku pierwszego roku przez spółkę o ratingu kredytowym A. Jest to trzyletnia obligacja o nominale 100, z kuponem w wysokości 4% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku.

Cena tej obligacji w momencie emisji wyznaczona przy użyciu opisanego modelu wynosi w przybliżeniu:

A) 75.24

B) 85.01

C) 89.35

D) 94.05

E) 99.00

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 października 2009 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	E	
4	E	
5	C	
6	B	
7	A	
8	D	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.