Zadanie 1.
W pewnym jednorodnym portfelu składającym się z 200 ryzyk pojedyncze ryzyko ma następujące charakterystyki:

- przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ łączna wartość szkód ma (warunkowo) złożony rozkład Poissona
- z warunkową oczekiwaną liczbą szkód równą λ
- i z warunkowym rozkładem wartości pojedynczej szkody Y o gęstości:

$$f_{Y|\Lambda=\lambda}(y) = \frac{1}{\Gamma(2+\lambda)} y^{1+\lambda} e^{-y}, \qquad y > 0$$

Każde z 200 ryzyk w portfelu zostało niezależnie wylosowane z populacji ryzyk, w której rozkład parametru ryzyka Λ dany jest gęstością:

$$g_{\Lambda}(\lambda) = \frac{20^4}{\Gamma(4)} \lambda^3 e^{-20\lambda}, \qquad \lambda > 0$$

Oczekiwana łączna wartość szkód z tego portfela wynosi:

(A) 88

(B) 90

(C) 92

(D) 94

(E) 96

Zadanie 2.

Rozważamy zdyskontowaną na moment początkowy wartość składek pomniejszoną o wartość szkód w klasycznym procesie nadwyżki ubezpieczyciela:

$$B(t) = c\frac{1-\exp(-\delta t)}{\delta} - \sum_{k:T_k \le t} \exp(-\delta T_k)Y_k \text{ , gdzie:}$$

- ct jest sumą składek które napłynęły do momentu t,
- T_k, Y_k to moment wystąpienia i wartość bieżąca k-tej szkody
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ są niezależne
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 0.01
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają rozkład o momentach równych: $\mathrm{E}(Y_1) = 1$, $\mathrm{E}(Y_1^2) = 2$
- $\delta = 4\%$ to zakładana przy dyskontowaniu intensywność oprocentowania

Dobierz stałą c tak, aby współczynnik zmienności (odchylenie standardowe podzielone przez wartość oczekiwaną) zmiennej:

$$B(\infty) = \frac{c}{\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\delta T_k)Y_k$$

Wyniósł 1/10.

(A) 110

(B) $100 + 10\sqrt{2}$

(C) 120

(D) $100 + 20\sqrt{2}$

(E) 140

Wskazówka: zauważ, że $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\delta T_k)Y_k \approx \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\delta hk)X_k^{(h)}$*, gdzie* $X_1^{(h)}, X_2^{(h)}, X_3^{(h)}, \ldots$ *to zmienne i.i.d. o rozkładzie złożonym Poisson* $(\lambda h, F_Y)$*, oraz iż błąd tego przybliżenia znika gdy* $h \to 0$.

Zadanie 3.
W pewnym ubezpieczeniu proces generowania szkód przez ubezpieczonego charakteryzującego się wartością λ parametru ryzyka Λ jest procesem Poissona o intensywności λ (rocznie).
Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji wszystkich ubezpieczonych dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$, gdzie $(\alpha, \beta) = (5, 20)$

Załóżmy, że tak w pierwszym jak i w drugim roku mamy w portfelu po 200 umów ubezpieczeniowych. Jednak 100 losowo dobranych ubezpieczonych z pierwszego roku kontynuuje ubezpieczenie w drugim roku, zaś pozostałych stu z pierwszego roku nie kontynuuje w roku następnym, zaś w portfelu w roku drugim w ich miejsce pojawia się 100 nowych, niezależnie dolosowanych z populacji. W rezultacie liczba szkód w roku pierwszym wynosi:

- $N_1 = N_1^P + N_1^T$, zaś w roku drugim jest równa:
- $N_2 = N_2^P + N_2^T$,
- gdzie N_1^P oraz N_2^P to liczby szkód wygenerowane przez kontynuatorów w roku pierwszym i drugim, odpowiednio,
- zaś N_1^T oraz N_2^T to liczby szkód wygenerowane przez ubezpieczonych którzy w naszym portfelu pojawili się wyłącznie w roku pierwszym lub wyłącznie w drugim, odpowiednio.

Przy tych założeniach $\mathrm{var}(N_1 + N_2)$ wynosi:

(A) 102.5

(B) 103.75

(C) 105

(D) 106.25

(E) 107.5

Zadanie 4.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:

$$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}, \text{ gdzie:}$$

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \dfrac{\alpha v^{\alpha}}{(v+y)^{\alpha+1}}$.

Wiemy, że parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 2$, $v = \dfrac{1}{2}$ oraz $\theta = \dfrac{1}{5}$.

Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$, a więc zdarzenia:

- $\exists T > 0$ takie, że $U(T) < 0$

jest funkcją nadwyżki początkowej *u*. Wiadomo, że dla odpowiednio dobranych parametrów a, b, c funkcja ta spełnia zależność:

$$\lim_{u \to \infty} \Psi(u)(1+au)^b = c$$

(A) $(a,b,c) = (2, 1, 5)$

(B) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}, 1, 5\right)$

(C) $(a,b,c) = (2, 2, 5)$

(D) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}, 2, 5\right)$

(E) $(a,b,c) = (1, 2, 5)$

Zadanie 5.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

- $U_n = u + c \cdot n - S_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, $S_n = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$,

gdzie zmienne $W_1, W_2, W_3, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład dany na odcinku $(0, 2)$ gęstością:

$$f_W(x) = \frac{15}{16} x^2 (2 - x)^2$$

Jeśli parametry procesu wynoszą:

- $u = 0$, $c = 1$

to prawdopodobieństwo ruiny w horyzoncie dwóch okresów czasu (a więc prawdopodobieństwo zdarzenia, iż $U_1 < 0$ lub $U_2 < 0$) wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{9}{16}$

(C) $\frac{5}{8}$

(D) $\frac{11}{16}$

(E) $\frac{3}{4}$

Zadanie 6.
W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód, które w ciągu t lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ jest procesem Poissona o intensywności λ (rocznie).
Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji wszystkich ubezpieczonych (tak naszych, jak i tych, którzy ubezpieczają się u konkurentów) dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$, gdzie $(\alpha, \beta) = (3, 9)$

Załóżmy, że w pierwszym roku tak nasza firma, jak i firmy konkurencyjne proponowały wszystkim ubezpieczenie w zamian za tę samą składkę. W drugim roku nasza firma kontynuuje praktykę z roku poprzedniego, natomiast konkurenci wprowadzili składki niższe od przeciętnej za bezszkodowy przebieg ubezpieczenia w pierwszym roku, zaś wyższe od przeciętnej odpowiednio dla ubezpieczonych, którzy mieli w pierwszym roku szkody. Zakładając, że wszyscy ubezpieczeni wybiorą tego ubezpieczyciela, który jest dla nich tańszy, oczekiwana częstotliwość szkód w drugim roku (w przeliczeniu na jednego ubezpieczonego) w naszej firmie wzrośnie w stosunku do pierwszego roku o:

(A) 42,6%

(B) 26,9%

(C) 19,1%

(D) 16,7%

(E) 10,0%

Zadanie 7.

$N, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe, N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 10, zaś $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają identyczny rozkład ciągły określony na półosi dodatniej.

Niech:

- $M = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$, przy czym jeśli $N = 0$, to przyjmujemy $M = 0$.

Niech dla dowolnej liczby $\alpha \in (0,1)$:

- m_α oznacza taką liczbę, że $\Pr(M \le m_\alpha) = \alpha$, i analogicznie:
- y_α oznacza taką liczbę, że $\Pr(Y_1 \le y_\alpha) = \alpha$

Niech α^* oznacza taką wartość liczby α, dla której zachodzi:

$$y_\alpha = m_{0,95}$$

Liczba α^* z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 0,975

(B) 0,980

(C) 0,985

(D) 0,990

(E) 0,995

Zadanie 8.
Zmienne losowe $N, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ są niezależne, przy czym:

- $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ mają identyczny rozkład taki, że: $\Pr(Y_1 \le 100) = \frac{5}{6}$
- N ma rozkład ujemny dwumianowy:
$$\Pr(N = k) = \binom{r+k-1}{k}(1-q)^r q^k, \qquad k = 0,1,2,\dots$$
z parametrami $(r, q) = \left(3, \frac{6}{10}\right)$.

Niech M oznacza maksimum spośród N pierwszych wyrazów ciągu $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$, a dokładniej:

- $M = \begin{cases} 0 & gdy \quad N = 0 \\ \max(Y_1, Y_2, \dots Y_N) & gdy \quad N > 0 \end{cases}$

Prawdopodobieństwo: $\Pr(M \le 100)$ wynosi:

(A) $\frac{64}{729}$

(B) 0.256

(C) 0.512

(D) $\frac{144}{235}$

(E) 0.64

Zadanie 9.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego (numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1,2,3,... \qquad \text{z parametrem } c \in (0,1).$$

Właśnie pojawiło się roszczenie, i okazało się, że jest to pierwsze roszczenie z wypadku o którym dotąd nie wiedzieliśmy, a który miał miejsce miesiąc temu. Jednym słowem, wiadomo, że zaszedł wypadek, wiemy więc, że N wyniosło co najmniej 1, i że najmniejsza liczba ze zbioru $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$, przyjęła wartość 1.

Wartość oczekiwana liczby roszczeń z tego wypadku, a więc:

$$E(N \mid \min\{T_1, T_2, ..., T_N\} = 1)$$

wynosi:

(A) $\frac{e}{e-c}$

(B) $\frac{e-c}{ec}$

(C) $\frac{e+c}{e-c}$

(D) $\frac{c}{e-c}$

(E) $\frac{e-c}{c}$

Zadanie 10.
Oznaczmy przez:

- X_t - łączną wartość szkód zaszłych w roku t w pewnym jednorodnym portfelu ubezpieczeń, zaś przez:
- $X_{t,k}$ - tę część łącznej wartości szkód zaszłych w roku t, które likwidowane są w roku $(t+k)$, $k = 0,1,2,...,$
- EP_t - składkę zarobioną w roku t,
- R_t - wartość oczekiwaną szkód zaszłych i niezlikwidowanych na koniec roku t (rezerwę na szkody).

Wiemy, że dla każdego t zachodzi:

- $\mathrm{E}(X_t) = 60\% EP_t$
- $\mathrm{E}(X_{t,k}) = \mathrm{E}(X_t) w_k$, gdzie:
- $w_0 = \frac{1}{2}$, zaś dla $k = 1,2,3,...$ $w_k = \frac{1}{3^k}$

Rezerwa na początek roku $t = 1$ wynosi $R_0 = 990$. Zakładamy, że w rozpoczynającym się roku składka zarobiona wyniesie $EP_1 = 1200$ a w następnym $EP_2 = 1400$. Wobec tego oczekiwana wartość szkód zaszłych i niezlikwidowanych na koniec roku $t = 2$ (a więc przewidywana obecnie wartość rezerwy R_2) wynosi:

(A) 880

(B) 800

(C) 720

(D) 650

(E) 600

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 października 2009 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	E	
4	A	
5	C	
6	B	
7	E	
8	C	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.