Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

L Egzamin dla Aktuariuszy z 5 października 2009 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważamy dwie polisy bezterminowe na życie dla (x). Każda z nich wypłaca jako świadczenie 1 zł na koniec roku śmierci. Polisa 1. opłacona jest za pomocą jednorazowej składki netto w momencie zawarcia umowy. Niech L_1 oznacza stratę ubezpieczyciela na moment wystawienia tej polisy. Natomiast w przypadku polisy 2. składki regularne netto będą płacone w postaci renty życiowej na początku każdego roku aż do śmierci. Niech L_2 oznacza stratę ubezpieczyciela na moment wystawienia tej polisy. Wiadomo, że

$$\frac{\mathrm{Var}(L_2)}{\mathrm{Var}(L_1)} = 1{,}826$$

Obliczyć A_x.

Wybierz odpowiedź najbliższą.

(A) 0,25

(B) 0,26

(C) 0,27

(D) 0,28

(E) 0,29.

2. Rozważamy ubezpieczenie n-letnie na życie i dożycie ciągłe dla (x). Jeśli umrze on w ciągu najbliższych n lat to zostanie wypłacone świadczenie 1 zł w chwili śmierci, a jeżeli dożyje wieku $x+n$ to 1 zł zostanie wypłacone właśnie w tym momencie. Składki netto będzie płacił w formie renty życiowej ciągłej h-letniej, gdzie $0 < h < n$. Odpowiednią intensywność składki netto oznaczamy tradycyjnie symbolem ${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:n})$. Załóżmy, że zwiększymy n o jeden miesiąc. O ile należy zmniejszyć h aby nie zmieniła się roczna intensywność składki netto.

Dane są ${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:n}) = 0{,}03$ oraz $A_{x+h:\overset{1}{\overline{n-h|}}} = 0{,}55$ oraz $\delta = 0{,}049$.

Wybierz odpowiedź najbliższą.

(A)
$0{,}80$ miesiąca

(B)
$0{,}85$ miesiąca

(C)
$0{,}90$ miesiąca

(D)
$0{,}95$ miesiąca

(E)
1 miesiąc.

3. Rozważamy ubezpieczenie ciągłe dla (x), które wypłaci t w chwili śmierci, jeśli ubezpieczony umrze w wieku (x+t). Niech Z oznacza wartość obecną świadczenia na moment wystawienia polisy. Załóżmy, że ubezpieczony został wylosowany z populacji wykładniczej o średniej trwania życia 80.

Techniczną intensywność oprocentowania δ wybraną na poziomie, który minimalizuje wartość współczynnika zmienności:

$\sqrt{Var(Z)}/E(Z)$

Obliczyć ten poziom δ.

Wybrać wartość najbliższą.

(A)
0,01

(B)
0,0125

(C)
0,0150

(D)
0,0175

(E)
0,02

4. Rozważamy polisę emerytalną, która polega na tym, że (x) płaci składki przez najbliższe m lat w postaci renty życiowej ciągłej, a po dożyciu wieku $x+m$ zaczyna pobierać emeryturę z intensywnością 1 na rok. W przypadku śmierci przed osiągnięciem wieku $x+m$ uposażeni otrzymują jednorazowe świadczenie w wysokości α razy suma wpłaconych dotychczas składek (w chwili śmierci).

Niech $\bar{P}(\alpha)$ oznacza odpowiednią intensywność roczną składek netto.
Wówczas $\frac{d\bar{P}(\alpha)}{d\alpha}$ wyraża się wzorem:

(A)

$$\frac{d\bar{P}(\alpha)}{d\alpha} = \bar{P}(\alpha)^2 \frac{(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{m}|}}{\delta_{\;m|}\bar{a}_x}$$

(B)

$$\frac{d\bar{P}(\alpha)}{d\alpha} = \bar{P}(\alpha) \frac{(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{m}|}}{{}_{m|}\bar{a}_x^{\;2}}$$

(C)

$$\frac{d\bar{P}(\alpha)}{d\alpha} = \bar{P}(\alpha)^2 \frac{(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{m}|}}{{}_{m|}\bar{a}_x^{\;2}}$$

(D)

$$\frac{d\bar{P}(\alpha)}{d\alpha} = \bar{P}(\alpha)^2 \frac{(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{m}|}}{{}_{m|}\bar{a}_x}$$

(E)

$$\frac{d\bar{P}(\alpha)}{d\alpha} = \bar{P}(\alpha) \frac{(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{m}|}}{{}_{m|}\bar{a}_x}$$

5. Rozważamy ubezpieczenie pary osób (x), (y), które wypłaca $T(x:y)$ zł w chwili pierwszej śmierci oraz $4T(\overline{x:y})$ zł w momencie drugiej śmierci. Zakładamy, że (x) jest wylosowany z populacji wykładniczej o średniej 100, natomiast (y) jest wylosowany z populacji wykładniczej o średniej 80. Obliczyć składkę jednorazową netto SJN za to ubezpieczenie przyjmując techniczną intensywność oprocentowania na poziomie $\delta = 0{,}02$.

Zakładamy, że zmienne losowe $T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 54,4 zł

(B) 55,4 zł

(C) 56,4 zł

(D) 57,4 zł

(E) 58,4 zł.

6. Rozpatrujemy model szkodowości dwojakiej:

$\mu_{1,x+t} = \frac{1}{100-t}$, $\mu_{2,x+t} = \frac{2}{120-t}$ dla $0 \leq t < 100.$

Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że (x) ulegnie jako pierwszej szkodzie tej, która w danej chwili mniej mu zagrażała niż druga „współzawodnicząca".

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 0,30

(B) 0,35

(C) 0,40

(D) 0,45

(E) 0,50

7. Rozważamy grupę 10 osób w wiekach 21,22,23,24,25,26,27,28,29,30. Zakładamy, że ich życia są niezależne oraz, że wszystkie te osoby pochodzą z populacji Gompertza z funkcją natężenia śmiertelności daną wzorem:

$\mu_x = B(1{,}23)^x$

gdzie $B > 0$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że jako pierwszy umrze parzystolatek?

(A) 0,51

(B) 0,53

(C) 0,55

(D) 0,57

(E) 0,59

8. Rozważamy ubezpieczenie n-letnie na życie dla (x), ciągłe, które wypłaci 1 $zł$ w chwili śmierci, jeżeli ubezpieczony umrze w ciągu n lat. Składki są płacone w postaci renty życiowej ciągłej n-letniej z odpowiednio dobraną stałą intensywnością netto $\bar{P}$. Niech $W(t) = e^{-\delta t}\bar{V}(t)$ oznacza wartość obecną rezerwy po t latach, obliczoną na moment wystawienia polisy. Załóżmy, że funkcja $W(t)$ osiąga maksimum w pewnym punkcie $t^* \in (0, n)$.

Obliczyć $\bar{P}$, jeśli wiadomo, że

$V(t^*) = 0{,}1$ oraz $\mu_{x+t^*} = 0{,}01$.

Wybierz wartość najbliższą.

(A) 0,009

(B) 0,011

(C) 0,013

(D) 0,015

(E) 0,017.

9. Rozważamy ubezpieczenie emerytalne dla (x), wybranego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega > x$. Polega ono na tym, że przez najbliższe m lat $(m < \omega - x)$, będzie on płacił składkę w postaci renty życiowej ciągłej z intensywnością netto 1. Po dożyciu wieku $x + m$ zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią z intensywnością E. Do rachunków netto użyto technicznej intensywności oprocentowania $\delta = 0$. Intensywność emerytury E jest więc funkcją x, m oraz ω. Wówczas elastyczność E względem wieku granicznego ω wyraża się wzorem:

(A)

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega}{E} = \frac{-\omega(x-\omega)}{(\omega - x - m)(2\omega - x - m)}$$

(B)

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega}{E} = \frac{2\omega(x-\omega)}{(\omega - x - m)(2\omega - x - m)}$$

(C)

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega}{E} = \frac{\omega(x-\omega)}{(\omega - x - m)(2\omega - x - m)}$$

(D)

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega}{E} = \frac{\omega(x-\omega)}{(\omega - x - m)(2\omega - 2x - m)}$$

(E)

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega}{E} = \frac{2\omega(x-\omega)}{(\omega - x - m)(2\omega - 2x - m)}$$

10. Niech $e_x = E\big(T(x)\big) = \frac{(100-x)(175-x)}{3(150-x)}$ (dla $0 \le x < 100$) oznacza przeciętne dalsze trwanie życia (x) wylosowanego z populacji z wiekiem nieprzekraczalnym 100.

Obliczyć ${}_{24}p_{46}$.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 0,397

(B) 0,407

(C) 0,417

(D) 0,427

(E) 0,437

L Egzamin dla Aktuariuszy z 5 października 2009 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	B	
4	D	
5	A	
6	C	
7	C	
8	A	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.