Zadanie 1.
W pewnej populacji kierowców każdego jej członka charakteryzują trzy zmienne:

- K – liczba przejeżdżanych kilometrów (w tysiącach rocznie)
- NP – liczba szkód w ciągu roku, w których kierowca jest stroną poszkodowaną
- NS – liczba szkód w ciągu roku, w których kierowca jest sprawcą
- Zmienna K ma w populacji kierowców rozkład Gamma o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem $f_K(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)$

Przyjmujemy prosty model, w którym doświadczenie kierowcy zmniejsza ryzyko (w przeliczeniu na tysiąc przejechanych kilometrów):

- $\mathrm{E}(NS|K)=Ka_S\exp(-b_S K)$,
- $\mathrm{E}(NP|K)=Ka_P\exp(-b_P K)$,

gdzie wszystkie parametry a_S, b_S, a_P, b_P mają wartości dodatnie, przy czym $b_S > b_P$, ponieważ doświadczenie kierowcy redukuje przede wszystkim szansę spowodowania szkody, a w mniejszym stopniu redukuje ryzyko „zostania poszkodowanym”.

Pojedynczą szkodę zdefiniowano w taki sposób, że każdej szkodzie odpowiada dokładnie jeden sprawca i jeden poszkodowany, że są to zawsze dwie różne osoby, przy tym obie należą do rozważanej populacji. W rezultacie zachodzi:

- $\mathrm{E}(NS)=\mathrm{E}(NP)$

Jasne jest, że w tym modelu kierowcy jeżdżący mało będą częściej sprawcami niż poszkodowanymi, zaś kierowcy jeżdżący dużo będą częściej poszkodowanymi niż sprawcami. Niech K^* oznacza taką liczbę tysięcy kilometrów przejeżdżanych rocznie przez kierowcę, dla której warunkowe (przy danym K) oczekiwane liczby szkód obu rodzajów są równe.
Przy założeniach, że:

- $\alpha=2$, $\beta=1/5$, $b_S=0.04$, $b_P=0.02$

liczba K^* z dobrym przybliżeniem wyniesie:

(A) 13.05

(B) 12.80

(C) 12.55

(D) 12.30

(E) 12.05

Zadanie 2.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą wypłat z tytułu n pierwszych wypadków
- wypłata X_i z i-tego wypadku jest równa łącznej kwocie szkód: $X_i = Y_i(1) + ... + Y_i(M_i)$
- kwoty szkód $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), ..., Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), ..., Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), ...$ oraz liczby szkód przypadających na poszczególne wypadki $M_1, M_2, M_3, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Jeśli przyjmiemy następujące założenia:

- zmienne $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), ..., Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), ..., Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), ...$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej jeden
- zmienne $M_1, M_2, M_3, ...$ mają ten sam rozkład przesunięty geometryczny:

  $\Pr(M_i = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ dla $k = 1,2,...$
- parametr składki wynosi $c = \lambda \cdot \mathrm{E}(X_1) \cdot 125\%$

wtedy współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*) R wyniesie:

(A) 1/6

(B) 1/18

(C) 1/9

(D) 1/10

(E) 1/12

Zadanie 3.
Liczby szkód $N_1,...N_t, N_{t+1}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $Q = q$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym o parametrach $(1, q)$. Niech $N = N_1 + ... + N_t$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o rozkładzie beta o gęstości:

$$f_Q(q) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot q^{\alpha-1} \cdot (1-q)^{\beta-1}, \quad q \in (0,1), \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Jeśli przyjmiemy wartości parametrów:
$\alpha = 2$,
$\beta = 8$,
$t = 2$,
Wtedy wariancja warunkowa $\mathrm{var}(N_{t+1} | N_1,...,N_t)$ okaże się następującą funkcją liczby zaobserwowanych szkód:

(A) $\dfrac{(2+N)(10-N)}{12^2}$

(B) $\dfrac{(2+N)(10-N)}{13 \cdot 12^2}$

(C) $\dfrac{(2+N)(10-N)}{13 \cdot 12}$

(D) $\dfrac{(2+N)(10-N)}{14 \cdot 12^2}$

(E) $\dfrac{(2+N)(10-N)}{14 \cdot 13 \cdot 12}$

Zadanie 4.
Poniższa tabela reprezentuje tzw. trójkąt danych, zawierając w odpowiednich klatkach wartości szkód zaszłych w ciągu roku t i zlikwidowanych w ciągu roku $(t+j)$, dla:

$t = 2005, 2006, 2007, 2008$;

$j = 0,1,2,3$;

$t + j \leq 2008$:

Łączna wartość szkód według:		Liczby lat opóźnienia likwidacji (j)			
		0	1	2	3
Roku zajścia szkody (t)	2005	83	59	38	18
	2006	98	60	52	
	2007	119	91		
	2008	100			

Wyznacz wartość rezerwy na szkody niezlikwidowane na koniec roku 2008 dotyczącej szkód zaszłych w latach 2005-2008 najprostszym wariantem metody Chain Ladder (bez uwzględnienia inflacji, nie poprzedzając obliczeń ważeniem poszczególnych wierszy, zakładając że wszystkie szkody likwidowane są z opóźnieniem nie większym niż trzy lata, itd.)

(A) 240.3

(B) 245.4

(C) 250.1

(D) 254.4

(E) 260.3

Zadanie 5.
Proces szkód w pewnym ubezpieczeniu jest złożonym procesem Poissona, z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą λ i rozkładem wartości szkody o dystrybuancie F_Y.

Ubezpieczony realizuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:
- nie zgłasza szkód, dopóki wartość którejś z nich nie przekroczy kwoty x_0,
- jeśli wartość którejś szkody przekroczy kwotę x_0, to jest ona zgłaszana, a następne ewentualne szkody w tym samym roku są zgłaszane już bez względu na ich wartość.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
- N – liczba szkód zaszłych w ciągu roku
- M – liczba szkód zgłoszonych
- K – liczba szkód nie zgłoszonych

Oczywiście zachodzi $N = M + K$.
Jeśli założymy, że $F_Y(x_0) = 1/2$, wtedy oczekiwana liczba szkód nie zgłoszonych $\mathrm{E}(K)$ wyraża się wzorem:

(A) $\frac{1}{2}\lambda$

(B) $\exp\left(\frac{1}{2}\lambda\right) - 1$

(C) $1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\right)$

(D) $\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\right) - 1 + \lambda$

(E) $1 + \lambda - \exp\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$

Wskazówka: wykorzystaj wzór $\mathrm{E}(K) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(K|N)\right)$

Zadanie 6.
Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W każdym z portfeli pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

- 1 portfel:

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości

$f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{2}$;

- 2 portfel:

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości

$f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{5}$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela $\Psi(u)$ od kapitału początkowego u jest postaci:

$$\Psi(u) = \frac{2}{3}\exp(-u) + \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{5}{2}u\right),$$

to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \ \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

(A) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{7}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{2}{21}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{21}\right)$

(D) $\left(\frac{2}{3}, \ \frac{2}{21}\right)$

(E) $\left(\frac{2}{3}, \ \frac{1}{7}\right)$

Zadanie 7.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego (numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład dany dystrybuantą F (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc),
- zmienna losowa N ma rozkład geometryczny:

$$\Pr(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k = 1,2,3,...$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, iż w ciągu miesiąca od momentu zajścia pewnego wypadku zgłoszono z tego wypadku 2 roszczenia. Wiemy, że $F(1) = 1/3$. Oczekiwana liczba roszczeń, które jeszcze z tego wypadku zostaną zgłoszone, a więc:

$$\mathrm{E}\left(N - 2 \middle| A\right)$$

wynosi:

(A) 3/5

(B) 1

(C) 4/3

(D) 3/2

(E) 5/3

Zadanie 8.

W pewnym ubezpieczeniu pojedynczą szkodę charakteryzuje trójka zmiennych losowych (Z, L, Y) oznaczających odpowiednio:

- Z – odstęp czasu pomiędzy zajściem szkody a jej zgłoszeniem,
- L – odstęp czasu pomiędzy zgłoszeniem szkody a jej likwidacją,
- Y – wartość szkody.

Załóżmy, że:

- zmienna Z oraz zmienna dwuwymiarowa (Y, L) są niezależne,
- $\mathrm{E}(Y|L) = 1 + L$,
- $\mathrm{var}(Y|L) = (1 + L)^2$.

Wiemy także, iż zmienna L ma rozkład Gamma o parametrach $(4, 5)$, zaś zmienna Z ma rozkład Gamma o parametrach $(1, 5)$, a więc ich wartości oczekiwane wynoszą odpowiednio 4/5 i 1/5.

Wariancja wartości szkody pod warunkiem, że odstęp czasu pomiędzy jej zajściem a likwidacją wyniósł 5/4, a więc:

$$\mathrm{var}(Y|L + Z = 1\tfrac{1}{4}),$$

wynosi:

(A) $4\frac{1}{6}$

(B) $4\frac{1}{12}$

(C) $4\frac{1}{18}$

(D) $4\frac{1}{24}$

(E) 4

Zadanie 9.
Ubezpieczony generuje szkody zgodnie z procesem Poisson o parametrze intensywności λ rocznie, i wszystkie szkody, które mu się przydarzą, zgłasza ubezpieczycielowi.
Składka Π_t płacona przez ubezpieczonego w roku *t* wyznaczana jest następująco:

- wynosi *M* dla $t = 1$, a więc w pierwszym roku ubezpieczenia,
- dla $t = 2,3,4,...$ wynosi także *M*, o ile w roku $t-1$ ubezpieczony miał co najmniej jedną szkodę,
- wynosi $\Pi_t = m + w(\Pi_{t-1} - m)$, jeśli rok $t-1$ był bezszkodowy.

Jeśli przyjmiemy wartości liczbowe parametrów formuły składki na poziomie:

- $M = 100$,
- $m = 30$,
- $w = 0.8$,

to dla ubezpieczonego o wartości parametru λ równej $\ln(10/9)$ oczekiwana składka w długim okresie:

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(\Pi_t)$$

wynosi:

(A) 50

(B) 55

(C) 65

(D) 70

(E) 85

Zadanie 10.
W pewnej populacji wszystkie podmioty narażone są na identyczne ryzyko straty *X* o rozkładzie złożonym Poissona z oczekiwaną liczbą szkód równą 1/10 oraz wartością pojedynczej szkody o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej równej 1. Przyjmijmy, że każdy podmiot z tej populacji kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, gdzie funkcja użyteczności ma postać:

$$u(x) = 1 - \exp(-\alpha x), \quad \alpha > 0,$$

a więc wszystkie podmioty przejawiają awersję do ryzyka. Awersja ta ma jednak w populacji zróżnicowane natężenie – rozkład współczynnika α jest rozkładem o gęstości określonej na przedziale $\alpha \in (0, 1)$ wzorem:

$$f_\alpha(x) = 2(1 - x).$$

Oznaczmy przez Π składkę, za którą rynek ubezpieczeniowy oferuje ochronę przed ryzykiem *X*, zaś przez $P(\Pi)$ prawdopodobieństwo, że losowo wybrany podmiot z tej populacji zakupi ubezpieczenie. Zysk na przeciętnym podmiocie z tej populacji przy danej składce Π wynosi więc:

$$Z(\Pi) = (\Pi - \mathrm{E}(X))P(\Pi)$$

Maksymalna wartość zysku osiągana jest przy składce Π wynoszącej:

(A) 0.15

(B) 1/6

(C) 0.18

(D) 0.19

(E) 0.20

Egzamin dla Aktuariuszy z 30 listopada 2009 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	A	
4	D	
5	C	
6	C	
7	D	
8	B	
9	B	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.