Zadanie 1.

Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases} 2x^2+\frac{4}{3}xy & \text{gdy } x\in(0,1) \text{ i } y\in(0,1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $S=X+Y$ i $V=Y-X$. Wyznacz $E(V \mid S=1)$.

(A) 0

(B) $\frac{3}{8}$

(C) $-\frac{3}{8}$

(D) $\frac{2}{7}$

(E) $-\frac{2}{7}$

Zadanie 2.

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n > 2$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym. Niech $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Oblicz

$$p = \Pr(X_1 \le S/2 \ \wedge\ X_2 \le S/2 \ \wedge \ldots \wedge\ X_n \le S/2).$$

(A) $p = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^n$

(B) $p = 0$

(C) $p = \frac{1}{2} - \frac{n}{2^n}$

(D) $p = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$

(E) $p = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n$

Zadanie 3.

Załóżmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją X z rozkładu normalnego $N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Rozważmy zadanie testowania hipotezy

$$H_0 : \mu = 0 \quad i \quad \sigma^2 = 1$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : \mu = -1 \quad i \quad \sigma^2 = 4.$$

Najmocniejszy test na poziomie istotności α jest postaci

$$\textit{Odrzuć } H_0\textit{, gdy } X \notin (-2, b).$$

Podaj poziom istotności α.

(A) $\alpha = 0{,}045$

(B) $\alpha = 0{,}027$

(C) $\alpha = 0{,}023$

(D) $\alpha = 0{,}033$

(E) $\alpha = 0{,}114$

Zadanie 4.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy tym $E[X] = E[Y] = 0$, $Var[X] = 3$ i $Var[Y] = 1$.
Oblicz $\Pr[|X| < |Y|]$.

(A) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.3333$

(B) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.7500$

(C) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.5000$

(D) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.6667$

(E) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.8333$

Zadanie 5.

Wektor losowy (X,Y) ma łączny rozkład prawdopodobieństwa dany następującą tabelką:

	$Y=1$	$Y=2$
$X=1$	θ^2	$(1-\theta)^2$
$X=2$	$\theta(1-\theta)$	$\theta(1-\theta)$

gdzie $\theta \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Na podstawie n-elementowej próbki z tego rozkładu, $(X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n)$, obliczono estymator *największej wiarogodności* $\hat{\theta}$. Oblicz wariancję tego estymatora.

(A) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{2n}$

(B) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2(1-\theta)^2}{2n}$

(C) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

(D) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2(1-\theta^2)}{n}$

(E) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2(1-\theta^2)}{2n}$

Zadanie 6.

Załóżmy, że $X_1,...,X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym, ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa, mającymi momenty rzędu 1, 2 i 3. Znamy

$$\mu = E(X_i) \quad \text{i} \quad \sigma^2 = Var(X_i)\,.$$

Niech $f(x)$ oznacza gęstość rozkładu pojedynczej zmiennej X_i. Wiemy, że rozkład jest symetryczny w tym sensie, że $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ dla każdego x.

Oblicz trzeci moment sumy: $E\left(S_n^3\right)$, gdzie $S_n = X_1 + ... + X_n$.

(A) $E\left(S_n^3\right) = n^2\mu(3\mu^2 - 2n\mu^2 + 3\sigma^2)$

(B) $E\left(S_n^3\right) = n\mu(n^2\mu^2 + 3\sigma^2)$

(C) $E\left(S_n^3\right) = n^2\mu(n\mu^2 + 3\sigma^2)$

(D) $E\left(S_n^3\right) = n^2\mu(n\mu^2 + \sigma^2)$

(E) $E\left(S_n^3\right) = n\mu(n^2\mu^2 + 3(n-1)\sigma^2 - \mu^2)$

Zadanie 7.

Załóżmy, że $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \exp(-x) \quad \text{dla} \quad x > 0 .$$

Zmienna losowa N jest niezależna od $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ.

Niech

$$Y_i = \min(X_i, 2), \qquad Z_i = X_i - Y_i,$$

$$S^{(Y)} = \sum_{i=1}^{N} Y_i, \qquad S^{(Z)} = \sum_{i=1}^{N} Z_i .$$

Oblicz $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right)$.

(A) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = 2\lambda\, e^{-2}$

(B) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = 2\lambda\, (1 - e^{-2})$

(C) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = 2\lambda\, e^{-4}$

(D) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = \lambda\, e^{-2}\left(1 + e^{-2}\right)$

(E) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = \lambda\, e^{-2}$

Zadanie 8.

Obserwujemy X_1, X_2, X_3, X_4 niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f_{\theta_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta_1}{x^{\theta_1+1}} & gdy \quad x > 1 \\ 0 & gdy \quad x \le 1 \end{cases}$$

i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f_{\theta_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta_2}{x^{\theta_2+1}} & gdy \quad x > 1 \\ 0 & gdy \quad x \le 1 \end{cases}$$

gdzie θ_1 i θ_2 są nieznanymi parametrami dodatnimi.
Wszystkie zmienne losowe są niezależne. Testujemy hipotezę $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ przy alternatywie $H_1 : \theta_1 < \theta_2$ za pomocą testu o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} < t \right\}$$

gdzie $\hat{\theta}_1$ i $\hat{\theta}_2$ są estymatorami największej wiarogodności odpowiednio parametrów θ_1 i θ_2 wyznaczonymi na podstawie prób losowych X_1, X_2, X_3, X_4 i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$.
Dobrać stałą *t* tak, aby otrzymać test o rozmiarze 0,05.

(A) 0,160

(B) 0,299

(C) 0,326

(D) 0,193

(E) 0,363

Zadanie 9.

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$, $n > 1$, będzie próbką z rozkładu Poissona z nieznanym parametrem λ (parametr jest wartością oczekiwaną pojedynczej obserwacji, $\lambda = E_\lambda(X_i) > 0$).

Interesuje nas drugi moment obserwacji, czyli wielkość $m_2(\lambda) = E_\lambda(X_i^2)$.
Estymator nieobciążony o minimalnej wariancji funkcji $m_2(\lambda)$ jest równy

A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$

(B) $\frac{1}{n^2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

(D) $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

(E) $\frac{1}{n^2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + (n-1)\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

Zadanie 10.

Pan A przeznaczył 5 zł na pewna grę. W pojedynczej kolejce gry pan A wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem 1/3 lub przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem 2/3. Pan A kończy grę, gdy wszystko przegra lub gdy będzie miał 10 zł.
Prawdopodobieństwo, że pan A wszystko przegra jest równe

(A) 0,87

(B) 0,67

(C) 0,50

(D) 0,97

(E) 0,77

Egzamin dla Aktuariuszy z 30 listopada 2009 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....
~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	D	
3	B	
4	A	
5	A	
6	C	
7	A	
8	C	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.