Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LII Egzamin dla Aktuariuszy z 15 marca 2010 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Zakład ubezpieczeń na życie planuje zbudowanie portfela ubezpieczeniowego przy następujących założeniach:

- budowa portfela będzie trwała 10 lat,
- w pierwszym roku zakład zawrze 10 000 umów ubezpieczenia, a w każdym następnym roku działalności zakład będzie zawierał o 5 000 umów więcej niż w poprzednim roku,
- wszystkie umowy ubezpieczenia zawierane są na początku roku,
- zawarcie każdej umowy ubezpieczenia powoduje poniesienie kosztów akwizycji w wysokości 250, wykazywanych na końcu roku,
- każda zawarta umowa ubezpieczenia, począwszy od drugiego roku jej trwania, przynosi zakładowi zysk w wysokości 100, wykazywany na końcu roku,
- w czasie budowy portfela (10 lat) zakład ubezpieczeń nie wypłaci żadnych świadczeń i żadna z zawartych umów nie zostanie rozwiązana.

Oblicz, jaka powinna być minimalna początkowa wysokość kapitału zakładu ubezpieczeń (kapitał opłacono na początku pierwszego roku), aby na końcu każdego roku, podczas całego 10-letniego okresu budowy portfela, jego wysokość nie była niższa niż 3 000 000. Przyjmij, że stopa zwrotu z inwestycji wynosi 5%.

Podaj najbliższą wartość:

A) 11 220 000
B) 11 320 000
C) 11 420 000
D) 11 520 000
E) 11 620 000

2. Kredyt w wysokości 300 000 udzielony na okres 20 lat może być spłacony na dwa sposoby ratami płatnymi na końcu roku.

Sposób pierwszy polega na tym, że przez pierwsze 10 lat kredyt jest spłacany równymi ratami o wysokości R, natomiast przez pozostałe 10 lat kredyt spłaca się ratami, które spełniają warunek, iż każda następna rata jest o 10% niższa od poprzedniej.

O sposobie drugim wiadomo, że przez okres pierwszych 10 lat płacimy raty o zmiennej wielkości, przy czym wysokość raty wzrasta co roku o tę samą kwotę, natomiast raty płatne na koniec 10, 11, 12 ... 20 roku są tej samej wysokości równej R.

Wiedząc, że stopa oprocentowania kredytu wynosi 7%, oblicz wysokość pierwszej raty przy spłacie kredytu drugim sposobem.

Podaj najbliższą wartość.

A) 21 000
B) 21 100
C) 21 200
D) 21 300
E) 21 400

3. Portfel inwestycyjny zawiera następujące rodzaje instrumentów finansowych:

- 10 – letnie obligacje z kuponem o wartości 6% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku i wartością wykupu równą wartości nominalnej,
- 15 - letnie obligacje zero kuponowe,
- 25 - letnie obligacje z kuponem o wartości 6% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku i wartością wykupu równą wartości nominalnej,
- 50 – letnie obligacje zero kuponowe.

Duration całego portfela wynosi 22, natomiast duration portfela składającego się tylko z obligacji 10, 15 i 50 - letnich wynosi 24,27.

Wyznacz udział procentowy obligacji 25 – letnich w portfelu, przy założeniu, że stopa procentowa jest równa 6%.

Podaj najbliższą wartość:

A) 20.1%
B) 21.1%
C) 22.1%
D) 23.1%
E) 24.1%

4. Wiedząc, że:

$\bar{a}_{\overline{n}|} = a$

$\bar{a}_{2\overline{n}|} = b$

wskaż, który z poniższych wzorów wyraża $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$:

A) $$\frac{(a^3 * b - a^4) * \ln \dfrac{a}{b-a} - a * b^4 + 2 * a^3}{(2 * b - a)^2}$$

B) $$\frac{(a * b^4 - a^3) * \ln \dfrac{a}{b-a} - a * b^3 + 2 * a^4}{(2 * b - a)^2}$$

C) $$\frac{(a^4 * b - a^3) * \ln \dfrac{a}{b-a} - a^3 * b + 2 * a^3}{(b - 2 * a)^2}$$

D) $$\frac{(a^4 * b - a^3) * \ln \dfrac{b-a}{a} - a^4 * b + 2 * a^3}{(2 * b - a)^2}$$

E) $$\frac{(a^3 * b - a^4) * \ln \dfrac{b-a}{a} - a^3 * b + 2 * a^4}{(b - 2 * a)^2}$$

5. Zakład ubezpieczeń majątkowych prowadzi działalność od 1 stycznia 2006 roku. Część szkód jest zgłaszana w formie rent pewnych wieczystych płatnych na koniec roku. Łączna liczba szkód rentowych, które zaszły w danym roku stanowi 0.1% liczby polis dla tego roku, zaś liczba polis w 2006 wyniosła 10 000 i w kolejnych latach rosła o 5%. Prawdopodobieństwo, że renta zostanie zgłoszona do wypłaty z k-letnim opóźnieniem ($k = 0,1,2, \dots$) w stosunku do roku zajścia szkody wynosi $p_k = \frac{1}{2^{k+1}}, k = 0,1,2, \dots$ ($k = 0$ oznacza, że renta jest zgłoszona do wypłaty w tym samym roku, w którym zaszła szkoda). Zakładamy, że wypłaty rent zaczynają się natychmiast po zgłoszeniu. Rok zgłoszenia renty do wypłaty określa stałą miesięczną płatność renty, która w przyszłości nie jest indeksowana. I tak miesięczna płatność z tytułu rent zgłoszonych w 2006 roku wynosi 100 PLN, rent zgłoszonych w 2007 roku wynosi 102 PLN i o 2% więcej w każdym kolejnym roku. Zakładając, że zgłoszenia rent z kolejnych lat zajścia szkód są niezależne, wyznacz wartość oczekiwaną łącznej kwoty wypłat świadczeń rentowych w 2009 roku (do obliczeń nie przyjmuj zaokrągleń do całkowitej liczby rent zgłaszanych i wypłacanych w danym roku). Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A) 3 336

B) 3 347

C) 3 358

D) 3 369

E) 3 380

6. Cena rynkowa P pewnego instrumentu dłużnego spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{dP}{di} = -10v(Ia)_{\overline{20|}} - 2000v^{21},$$

gdzie v jest czynnikiem dyskontującym dla stopy i = YTM. Wyznacz wartość P tego instrumentu dla i = YTM = 7%, jeżeli dla i = YTM = 5% wynosi ona 162. Podaj najbliższą wartość.

A) 128
B) 132
C) 136
D) 147
E) 155

7. Na rynku finansowym dany jest instrument pochodny typu europejskiego X zapadający za 5 lat od dziś. Instrumentem bazowym dla instrumentu X jest akcja, o której wiadomo, że rozkład jej ceny S_5 za 5 lat jest zależny od zmiennej Y o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[60, 220]$ w następujący sposób:

$$S_5 = 2Y - 100 \qquad Y \sim U[60,220]$$

Wypłata V_5 generowana przez instrument X dana jest następującą funkcją zależną od ceny S_5 oraz od zmiennej Y:

$$V_5 = \max(2S_5 - 300, 0) \cdot \exp(-0.38Y).$$

Ponadto na rynku dostępna jest zerokuponowa obligacja rządowa o terminie zapadalności równym 5 lat, której cena obecna zależy od zmiennej Y w następujący sposób:

$$P(0,5) = \exp(-0.12Y).$$

Na podstawie powyższych informacji oraz zakładając brak arbitrażu obecna wartość instrumentu X wynosi (podaj najbliższą wartość):

A) $0.1 \cdot \exp(-62.5) \cdot (1 - 48.5 \cdot \exp(-47.5))$

B) $16 \cdot \exp(-62.5) \cdot (1 - 48.5 \cdot \exp(-47.5))$

C) $160 \cdot \exp(-62.5) \cdot (1 - 4.85 \cdot \exp(-47.5))$

D) $5 \cdot \exp(-30) \cdot (0.63 - 0.97 \cdot \exp(-80))$

E) $8 \cdot \exp(-30) \cdot (63 - 97 \cdot \exp(-80))$

8. Dany jest dyskretny proces X_t, $t = 0,...,3$ opisujący zachowanie rocznej stopy zmienno-procentowej. Wiadomo, że stopa startuje z wartości początkowej $X_0 = 4.35\%$ i rośnie o 30% lub maleje o 35% w stosunku do wartości z poprzedniego okresu odpowiednio z prawdopodobieństwami 0.75 i 0.25.

Dany jest również instrument bazowy, którego cenę opisuje dyskretny proces:

$$S_t = 120 \cdot \exp(5X_t - 1),\ t = 0,...,3.$$

Na instrument bazowy S_t wystawiono europejską barierową opcję kupna typu *knock-down-and- out* (*) (opcja z barierą „wyjścia w dół") o cenie wykonania $K = 48$ i barierze $H = 54$.

Wyznacz obecną cenę opcji barierowej zakładając roczną stopę wolną od ryzyka 6%.

Przy sprawdzaniu aktywności opcji zachowaj dokładność do setnych części ceny.

A) 6.81
B) 11.07
C) 11.27
D) 13.18
E) 13.43

<u>Wskazówka:</u>

(*) Opcja z barierą „wyjścia" (knock-out option) przestaje być aktywna w momencie osiągnięcia przez cenę instrumentu bazowego ustalonej bariery.

Opcja z barierą „wyjścia w dół" (knock-down and out) wygasa bez wartości, jeśli w dowolnym momencie życia opcji, przed datą wygaśnięcia, następuje obniżenie ceny instrumentu bazowego poniżej poziomu bariery. Opcja przestaje być wtedy aktywna bez względu na rozwój ceny instrumentu bazowego w przyszłości.

9. Dwuletnia obligacja korporacyjna o nominale 1 000 i kuponie 8% płatnym rocznie jest wyceniana w momencie emisji na 1 018 PLN. Ponadto, wiadomo, że:

- roczna obligacja rządowa o nominale 1 000 z 5% kuponem płatnym rocznie wyceniona jest w momencie emisji na 1 000,
- dwuletnia obligacja rządowa o nominale 1 000 z 5% kuponem płatnym rocznie jest wyceniona w momencie emisji na 1 000.

Jakiego narzutu na ryzyko kredytowe używa rynek przy wycenie tej obligacji? Podaj najbliższą odpowiedź:

A) 1.75%
B) 2.00%
C) 2.25%
D) 2.50%
E) 2.75%

10. Rozważmy następujący model wyceny obligacji, w którym:

- dostępne są 4 obligacje zerokuponowe o nominale 1, które wygasają w chwilach 1, 2, 3 i 4, odpowiednio;
- ceny tych obligacji w chwili 0 wynoszą odpowiednio: $P(0,1) = 0.9$, $P(0,2) = 0.81$, $P(0,3) = 0.729$, $P(0,4) = 0.666$ (gdzie $P(0,T)$ oznacza cenę w chwili 0 obligacji wygasającej w momencie T).

Wiadomo, że w chwili 1 wystąpi jeden z 3 możliwych stanów rynku: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ceny obligacji w chwili 1, w każdym ze stanów dane są w tabeli:

	ω_1	ω_2	ω_{13}
$P(1,2)$	0.870	0.900	0.960
$P(1,3)$	0.750	0.800	0.950
$P(1,4)$	0.700	0.750	x

Żadne transakcje nie są możliwe pomiędzy chwilami 0 i 1. Wartość x, przy której model ten jest wolny od arbitrażu wynosi (podaj najbliższą wartość):

A) 0.720
B) 0.760
C) 0.800
D) 0.840
E) 0.880

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 marca 2010 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	B	
4	E	
5	E	
6	B	
7	A	
8	B	
9	B	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.