Zadanie 1.
Liczba szkód N z pojedynczej umowy w pewnym ubezpieczeniu jest zmienną losową o rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(N=0)=p,$$

$$\Pr(N=k)=\frac{(1-p)\cdot\lambda^k}{(e^{\lambda}-1)\cdot k!},\qquad k=1,2,3,\ldots,$$

z nieznanymi parametrami $p\in[0,1)$, $\lambda>0$.
Mamy próbkę $N_1,N_2,\ldots,N_{1000}$ obserwacji z 1000 takich umów ubezpieczeniowych. Zakładamy niezależność tych obserwacji.

Niech $(\hat{p},\hat{\lambda})$ oznaczają estymatory parametrów (p,λ) uzyskane metodą największej wiarygodności. Jeśli wiadomo, że w próbce zaobserwowaliśmy łącznie 463 szkody, przy czym wszystkie te szkody powstały z 400 umów (pozostałe 600 okazało się bezszkodowe), to wartość estymatora $\hat{\lambda}$ z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 0.511

(B) 0.300

(C) 0.364

(D) 0.405

(E) 0.463

Zadanie 2.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1+\theta)\cdot\lambda\cdot \mathrm{E}(Y_1)$, $\theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

- $L := \sup_{t>0}\{u - U(t)\}$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

- $L = l_1 + l_2 + ... + l_N$, ($L = 0$ gdy $N = 0$),

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej u, i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$\mathrm{E}(N | L > u)$$

Dana jest wzorem:

(A) $\dfrac{1+\theta}{\theta} + u$

(B) $\dfrac{1+\theta}{\theta} + \dfrac{u\theta}{1+\theta}$

(C) $\dfrac{1+\theta}{\theta} + \dfrac{(1+\theta)u}{2+\theta}$

(D) $\dfrac{1+\theta}{\theta} + \dfrac{(1+\theta)u}{1+2\theta}$

(E) $\dfrac{1+\theta}{\theta} + \dfrac{u}{1+\theta}$

Zadanie 3.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ mają ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie:

  $F_Y(y) = 1 - (1 + y)^{-\alpha}$ z parametrem $\alpha = \dfrac{7}{2}$
- $c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot \mathrm{E}(Y_1)$, $\theta > 0$

Rozważmy zmienną losową:

- $L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$

Kwadrat współczynnika zmienności tej zmiennej, a więc:

$$\frac{\mathrm{var}(L)}{\{\mathrm{E}(L)\}^2}$$

wynosi:

(A) 3θ

(B) $1 + 3\theta$

(C) 6θ

(D) $1 + 6\theta$

(E) θ

Zadanie 4.

Liczby szkód $N_1,...N_t,N_{t+1}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $\Lambda = \lambda$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej λ. Niech $N = N_1 + ... + N_t$. Parametr ryzyka Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma o gęstości:

$$f_\Lambda(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta x), \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Jeśli przyjmiemy wartości parametrów:

$\alpha = 2$,

$\beta = 10$,

$t = 10$,

Wtedy warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

- $\mathrm{var}(N_{t+1} | N_1,..., N_t) > \mathrm{var}(N_{t+1})$

jest postaci:

(A) $N > 0$

(B) $N > 1$

(C) $N > 2$

(D) $N > 3$

(E) dla żadnej dopuszczalnej wartości N nierówność powyższa nie zachodzi

Zadanie 5.
W pewnym systemie bonus-malus mamy 4 klasy ponumerowane liczbami 1,2,3,4, oraz odpowiadające im poziomy składki: $\Pi, \frac{8}{9}\Pi, \left(\frac{8}{9}\right)^2\Pi, \left(\frac{8}{9}\right)^3\Pi$.
Zasady ruchu pomiędzy klasami są następujące:

- Kierowca przesuwa się do klasy 1 po każdym roku, w którym zgłosił jedną lub więcej szkód,
- Po roku bez zgłoszeń szkód w klasie i kierowca przesuwa się do klasy o numerze $\min\{i+1,4\}$.

Niech liczby szkód zgłaszanych przez pewnego kierowcę w kolejnych latach będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że prawdopodobieństwo zgłoszenia zera szkód w ciągu roku wynosi 0,9. Wartość oczekiwana składki płaconej przez tego kierowcę w piątym roku ubezpieczenia równa jest:

(A) 0.756Π

(B) 0.676Π

(C) 0.594Π

(D) 0.512Π

(E) zależy, w której klasie kierowca znalazł się w pierwszym roku

Zadanie 6.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 1.5, składka roczna wynosi 1, a łączna wartość szkód w każdym roku z prawdopodobieństwem dwie trzecie wynosi 0 i z prawdopodobieństwem jedna trzecia wynosi 2 (niezależnie od wartości szkód w innych latach).
Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) $\frac{1}{8\sqrt{2}}$

Zadanie 7.

Niech w pewnym jednorodnym portfelu ryzyk X_t oznacza łączną wartość szkód, n_t odpowiadającą jej liczbę jednostek ryzyka, a μ_t oczekiwaną wartość szkód na jednostkę ryzyka w roku *t*.

Fluktuacje łącznej wartości szkód w roku *t* i roku następnym opisują założenia:

$$\mathrm{E}\left(X_t \middle| \mu_{t+1}, \mu_t\right) = \mu_t \cdot n_t$$

$$\mathrm{E}\left(X_{t+1} \middle| \mu_{t+1}, \mu_t\right) = \mu_{t+1} \cdot n_{t+1}$$

$$\mathrm{var}\left(X_t \middle| \mu_{t+1}, \mu_t\right) = s^2 \cdot n_t$$

$$\mathrm{var}\left(X_{t+1} \middle| \mu_{t+1}, \mu_t\right) = s^2 \cdot n_{t+1}$$

$$\mathrm{cov}\left(X_{t+1}, X_t \middle| \mu_{t+1}, \mu_t\right) = 0$$

Natomiast zmiany μ_t w kolejnych latach opisują założenia:

$$\mathrm{E}\left(\mu_{t+1} \middle| \mu_t\right) = \mu_t$$

$$\mathrm{var}\left(\mu_{t+1} \middle| \mu_t\right) = a$$

$$\mathrm{cov}\left(\mu_{t+1}, X_t \middle| \mu_t\right) = 0$$

Jeśli $a = 1$, $s^2 = 6$, $n_{t+1} = 40$, $n_t = 60$, to wartość oczekiwana

$E\left(\left(\frac{X_t}{n_t} - \frac{X_{t+1}}{n_{t+1}}\right)^2\right)$ wynosi:

(A) 2.25

(B) 2.24

(C) 1.74

(D) 1.25

(E) 1.24

Zadanie 8.

Szkody, do których doszło przed momentem czasu $t = 0$ u pewnego ubezpieczyciela charakteryzuje para zmiennych losowych (T, D) oznaczających odpowiednio:

- T – czas zajścia szkody,
- D – odstęp czasu pomiędzy zajściem szkody a jej likwidacją.

Jednostką pomiaru obu zmiennych jest 1 rok.

Załóżmy, że:

- zmienne T i D są niezależne,

ich rozkłady prawdopodobieństwa dane są gęstościami, określonymi odpowiednio na półosi ujemnej:

- $f_T(t) = r \cdot \exp(rt)$ dla $t \in (-\infty, 0)$, gdzie $r > 0$,

i dodatniej:

- $f_D(x) = \beta \cdot \exp(-\beta x)$ dla $x \in (0, \infty)$, gdzie $\beta > 0$.

Stosunek oczekiwanej liczby szkód zaszłych przed dniem bilansowym do oczekiwanej liczby szkód zaszłych w ciągu roku poprzedzającego dzień bilansowy, który przy przyjętych oznaczeniach wyraża się w prosty sposób jako:

- $\dfrac{\Pr(T + D > 0)}{\Pr(T \in (-1, 0))}$

wynosi:

(A) $\dfrac{1 - \exp(-r - \beta)}{r + \beta}$

(B) $\dfrac{1}{r + \beta}$

(C) $\dfrac{r(1 - \exp(-\beta))}{(r + \beta)(1 - \exp(-r))}$

(D) $\dfrac{r(1 - \exp(-r - \beta))}{(r + \beta)(1 - \exp(-r))}$

(E) $\dfrac{r}{(r + \beta)(1 - \exp(-r))}$

Zadanie 9.
Ubezpieczony generuje szkody zgodnie z procesem Poisson o parametrze intensywności λ rocznie, i wszystkie szkody, które mu się przydarzą, zgłasza ubezpieczycielowi.
Składka Π_t płacona przez ubezpieczonego w roku *t* wyznaczana jest następująco:

- wynosi *M* dla $t = 1$, a więc w pierwszym roku ubezpieczenia, zaś dla $t = 2,3,4,...$:
- wynosi $\Pi_t = m + w(\Pi_{t-1} - m)$, jeśli rok $t-1$ był bezszkodowy,
- wynosi $\Pi_t = M + W(\Pi_{t-1} - M)$, jeśli w roku $t-1$ zdarzyła się co najmniej jedna szkoda.

Jeśli przyjmiemy wartości liczbowe parametrów formuły składki na poziomie:
- $M = 100$, $W = 0.4$
- $m = 20$, $w = 0.8$,

to dla ubezpieczonego o wartości parametru λ równej $\ln(10/9)$ oczekiwana składka w długim okresie:

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(\Pi_t)$$

wynosi:

(A) 36

(B) 37.4

(C) 40

(D) 42.4

(E) 44

Zadanie 10.

Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w, i narażony jest na stratę w wysokości X. Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności. Jego funkcja użyteczności jest postaci:

$u(x) = -\exp(-x)$.

Strata X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$.

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty z odszkodowaniem za szkodę x zdefiniowanym dla każdego $x \in (0,1)$ jako:

$$I_d(x) = \begin{cases} 0 & gdy \quad x < d \\ x - d & gdy \quad x \geq d \end{cases}$$

w zamian za cenę równą $(1+\theta)\cdot \mathrm{E}\{I_d(X)\}$, gdzie dodatni parametr θ jest taki sam dla wszystkich $d \in [0,1]$.

Podmiot, o którym mowa, dokonuje wyboru parametru kontraktu $d \in [0,1]$ przy zadanej wartości parametru oferty rynkowej θ. Wiemy, że podmiot wybrał kontrakt z parametrem $d = \frac{1}{2}$. Wobec tego parametr θ oferty rynku ubezpieczeniowego musi wynosić (z dobrym przybliżeniem):

(A) 11,9%

(B) 12,5%

(C) 13,2%

(D) 14,0%

(E) 14,9%

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 marca 2010 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi[*] T

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I....................................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja[♦]
1	B	
2	E	
3	D	
4	C	
5	A	
6	B	
7	D	
8	E	
9	C	
10	A	

[*] Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
[♦] Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.