Zadanie 1.

Liczba szkód N z pojedynczej umowy w pewnym ubezpieczeniu jest zmienną losową o rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(N = 0) = p_0,$$

$$\Pr(N = k) = (1 - p_0)(1 - q)q^{k-1}, \qquad k = 1,2,3,...,$$

z nieznanymi parametrami $p_0 \in [0,1)$, $q \in (0,1)$.

Mamy próbkę $N_1, N_2, ..., N_{100}$ obserwacji ze 100 takich umów ubezpieczeniowych. Zakładamy niezależność tych obserwacji.

Niech $(\hat{p}_0, \hat{q})$ oznaczają estymatory parametrów (p_0, q) uzyskane metodą największej wiarygodności. Jeśli wiadomo, że w próbce zaobserwowaliśmy łącznie 60 szkód z 15 umów (pozostałe 85 umów okazało się bezszkodowe), to wartość estymatora $\hat{q}$ z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{3}{8}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{5}{8}$

(E) $\frac{3}{4}$

Zadanie 2.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ mają taki sam rozkład
- $c = (1+\theta) \cdot \lambda \cdot \mathrm{E}(Y_1)$, $\quad \theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + ... + l_N, \qquad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie l_1 jest zmienną określoną, gdy nadwyżka spadnie poniżej u, i równa jest wtedy:

$$l_1 = u - U(t_1),$$

gdzie t_1 to moment czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Wiadomo, że jeśli doszło do ruiny, wtedy istnieje taka liczba $K \in \{1,2,...,N\}$ że:

$$l_1 + l_2 + ... + l_K > u \quad \text{oraz} \quad l_1 + l_2 + ... + l_{K-1} \le u$$

Innymi słowy, K oznacza kolejny numer tego spadku, przy którym nastąpiła ruina, zaś liczba $(N-K)$ oznacza liczbę spadków, do których doszło już po zajściu ruiny.

Wzór na oczekiwaną liczbę spadków po zajściu ruiny:

$$\mathrm{E}(N - K | L > u)$$

ma postać:

(A) $\dfrac{1+\theta}{\theta}$

(B) $\dfrac{1}{\theta(1+u)}$

(C) $\dfrac{1+u}{\theta}$

(D) $\dfrac{1}{\theta}$

(E) bez informacji o rozkładzie zmiennej Y_1 (lub l_1) nie można wskazać żadnej z powyższych odpowiedzi

Zadanie 3.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej β^{-1}
- $c = (1+\theta) \cdot \lambda, \quad \theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + ... + l_N, \qquad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie l_1 jest zmienną określoną, gdy nadwyżka spadnie poniżej u, i równa jest wtedy:

$$l_1 = u - U(t_1),$$

gdzie t_1 to moment czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia ruiny w pierwszym momencie, w którym doszło do spadku nadwyżki początkowej, pod warunkiem, że do ruiny doszło, a więc:

$$\Pr(N > 0, l_1 > u | L > u)$$

Dane jest wzorem:

(A) $\exp\left(-\frac{\beta u}{1+\theta}\right)$

(B) $\exp\left(-\frac{\beta \theta u}{1+\theta}\right)$

(C) $\exp(-\beta u)$

(D) $\frac{\exp(-\beta u)}{1+\theta}$

(E) $\frac{\theta \exp(-\beta u)}{1+\theta}$

Zadanie 4.

Przyjmijmy dla pewnego jednorodnego portfela ubezpieczeń następujące oznaczenia:

- $N_{t,j}$ to liczba szkód, które zaszły w roku *t* i zostały zgłoszone w roku $(t+j)$
- n_t to liczba jednostek ryzyka (*exposure*) w roku *t*.

Zakładamy, że $N_{t,j}$ jest dla każdej pary (t,j) zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną równą $n_t \lambda_t r_j$, gdzie λ_t to oczekiwana liczba szkód na jednostkę ryzyka w roku *t*, zaś współczynniki udziałowe $r_0, r_1, ...$ spełniają:

- $r_j \geq 0$, $j = 0,1,2,...$, oraz $\sum_{j=0}^{\infty} r_j = 1$.

Zakładamy także niezależność wszystkich zmiennych $N_{t,j}$, dla wszystkich całkowitych *t* oraz *j*.

Zaobserwowaliśmy w ostatnich 3 latach następujące realizacje zmiennej $N_{t,j}$:

t \ *j*	0	1	2
0	49	41	10
1	61	47	
2	80		

Wiemy także, że liczby jednostek ryzyka w tych latach wyniosły:

- $n_0 = 550$, $n_1 = 600$, $n_2 = 700$

Jeśli przyjmiemy dodatkowe założenia, że:

- $r_0 + r_1 + r_2 = 1$, oraz $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$,

i przy tych założeniach wyestymujemy parametry $(r_0, r_1, r_2, \lambda_0)$ metodą największej wiarygodności, to estymator parametru λ_0 wyniesie (z dobrym przybliżeniem):

(A) 0.194

(B) 0.197

(C) 0.200

(D) 0.203

(E) 0.207

Wskazówka: możesz ułatwić sobie zadanie estymując bezpośrednio MNW parametry $c_0 := \lambda_0 r_0$, $c_1 := \lambda_0 r_1$ *oraz* $c_2 := \lambda_0 r_2$, *i otrzymując estymator MNW parametru* λ_0 *jako sumę uzyskanych ocen.*

Zadanie 5.
Wartość oczekiwana szkód X z ryzyka jest funkcją parametru Λ który charakteryzuje podmiot na to ryzyko narażony, i wynosi $\mathrm{E}(X|\Lambda) = 3\Lambda$. Rozkład parametru Λ w populacji ryzyk dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_{\Lambda}(x) = 100x\exp(-10x)$

Ubezpieczyciel nie odróżnia ryzyk lepszych od gorszych, ustalić więc musi składkę równą dla wszystkich. Musi się jednak liczyć ze skutkami negatywnej selekcji. Oznaczmy przez:

- U zmienną losową przyjmującą wartość 1 jeśli podmiot nabędzie ubezpieczenie, zaś 0 jeśli nie nabędzie;
- Π składkę zaoferowaną przez ubezpieczyciela.

Załóżmy, że negatywna selekcja przejawia się w tym, że:

- $\Pr(U = 1|\Lambda = \lambda) = 1 - \exp\left(-\frac{2\lambda}{\Pi}\right)$ dla $\lambda > 0$

Jeśli ubezpieczyciel ustalił składkę na poziomie $\Pi = 1$, to oczekiwana wartość szkód dla przeciętnego podmiotu (spośród tych podmiotów które zawrą ubezpieczenie), a więc:
$\mathrm{E}(X|U = 1)$,
wyniesie z dobrym przybliżeniem:

(A) 0.868

(B) 0.846

(C) 0.827

(D) 0.805

(E) 0.783

Zadanie 6.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 3.5, składka roczna wynosi 2, a łączne wartości szkód w kolejnych latach $W_1, W_2, W_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(W_1 = k) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^k, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A) $\frac{1}{16}$

(B) $\frac{1}{16\sqrt{2}}$

(C) $\frac{1}{32}$

(D) $\frac{1}{32\sqrt{2}}$

(E) $\frac{1}{64}$

Zadanie 7.

Niech $X_{t,j}$ oznacza pomiar zmiennej w miesiącu *j* roku *t*, $t = 1,2,...10$, $j = 1,2,...,12$.
Zakładamy, że $X_{t,j}$ zawiera składnik wahań sezonowych oraz wahań przypadkowych.
Dokładniej, wahania przypadkowe spełniają założenia:

- $\mathrm{E}\left(X_{t,j} \middle| \mu_j\right) = \mu_j$
- $\mathrm{var}\left(X_{t,j} \middle| \mu_j\right) = s^2$,
- $\mathrm{cov}\left(X_{t,j}, X_{s,k} \middle| \mu_j, \mu_k\right) = 0$, jeśli ($j \neq k$ lub $t \neq s$)

zaś wahania sezonowe spełniają założenia:

- $\mathrm{E}\left(\mu_j\right) = \mu$
- $\mathrm{var}\left(\mu_j\right) = a^2$
- $\mathrm{cov}\left(\mu_j, \mu_k\right) = 0$, jeśli $j \neq k$

W celu estymacji parametrów sezonowych μ_j posługujemy się współczynnikiem:

$$1 - z := \frac{\frac{1}{10} s^2}{a^2 + \frac{1}{10} s^2}.$$

Nie znamy parametrów a^2 ani s^2. Estymujemy $(1 - z)$ korzystając z dekompozycji sumy kwadratów odchyleń na wahania wewnątrz-sezonowe i między-sezonowe:

$$1 - \hat{z} := const \cdot \frac{\sum_{t=1}^{10} \sum_{j=1}^{12} \left(X_{t,j} - \overline{X}_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{12} \left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)^2}$$

gdzie $\overline{X}$ oraz $\overline{X}_j$ oznaczają odpowiednio średnią ogólną (ze 120 obserwacji) i średnią z obserwacji dotyczących *j*-tego miesiąca.

Jeśli estymator współczynnika $(1 - z)$ miałby być ilorazem nieobciążonych estymatorów parametrów $\frac{1}{10} s^2$ oraz $\left(a^2 + \frac{1}{10} s^2\right)$, to stała *const* wynosi:

(A) $const = \frac{1}{9 \cdot 10}$

(B) $const = \frac{11}{9 \cdot 10 \cdot 12}$

(C) $const = \frac{1}{10 \cdot 10}$

(D) $const = \frac{12}{9 \cdot 10 \cdot 11}$

(E) $const = \frac{1}{10 \cdot 11}$

Zadanie 8.
Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności λ. O parametrze λ zakładamy, że jest on realizacją zmiennej losowej Λ o rozkładzie Gamma $(2, 5)$. Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód w czasie od 0 do *t*, zaś $T(t)$ - chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie *t*.
$\mathrm{E}\big(T(4)-4 \,|\, N(4)=2\big)$ wynosi:

(A) 3

(B) $\frac{9}{4}$

(C) $\frac{7}{5}$

(D) 2

(E) $\frac{9}{5}$

Zadanie 9.
W pewnym ubezpieczeniu może dojść co najwyżej do jednej szkody w ciągu roku. Wartość szkody (o ile do niej dojdzie) ma rozkład jednostajny na odcinku (0,1). Ubezpieczony, któremu (niezależnie w kolejnych latach) zdarzają się szkody z prawdopodobieństwem q, wędruje po klasach systemu bonus malus, w którym:

- Po roku ze zgłoszeniem szkody przenosi się do klasy 1
- Po roku bez zgłoszenia przenosi się do klasy 2 (jeśli był w klasie 1) lub do klasy 3 (jeśli był w klasie 2 lub 3).

Gdyby zgłaszał wszystkie szkody które mu się zdarzają, macierz prawdopodobieństw przejść wyglądałaby następująco:

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ q & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Niech r_1, r_2 oraz r_3 oznaczają składkę płaconą przez ubezpieczonego przesuniętego właśnie do klasy 1, 2 lub 3 odpowiednio.
Ponieważ $r_1 > r_2 > r_3$, nasz ubezpieczony postanawia zastosować następującą strategię:

- Zgłasza szkodę, o ile jej wartość przekracza d
- Szkody nie przekraczające d pokrywa we własnym zakresie;

przy czym wartość d jest ta sama bez względu na klasę, w której aktualnie przebywa.

Ubezpieczony tak dobiera parametr d, aby wartość oczekiwana całkowitego kosztu (płaconej składki i kosztu samodzielnie pokrywanych szkód) była jak najmniejsza. Bierze przy tym pod uwagę oczekiwany całkowity koszt w pojedynczym, odległym okresie czasu (na tyle, żeby oczekiwaną składkę liczyć w oparciu o graniczny rozkład na przestrzeni klas).

Jeśli składki wynoszą odpowiednio: $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.075$, $r_3 = 0.05$, zaś parametr charakteryzujący naszego ubezpieczonego wynosi $q = 0.1$, to optymalna wartość parametru d wynosi (z dobrym przybliżeniem):

(A) 0.05

(B) 0.055

(C) 0.06

(D) 0.065

(E) 0.07

Zadanie 10.
Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości *w*, i narażony jest na stratę *X*. Strata *X* jest zmienną losową o złożonym rozkładzie Poissona:
$X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$

- z oczekiwaną liczbą szkód równą $\mathrm{E}(N) = \lambda$, oraz:
- z wartością pojedynczej szkody o rozkładzie wykładniczym i wartości oczekiwanej równej $\mathrm{E}(Y_1) = \beta^{-1}$.

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty z pokryciem nadwyżki każdej szkody ponad kwotę *d*, a więc pokrywa:
$X_d = (Y_1 - d)_+ + (Y_2 - d)_+ + ... + (Y_N - d)_+$
W zamian za składkę w wysokości: $(1+\theta)\mathrm{E}(X_d)$, gdzie parametr θ ma wartość mniejszą od 100%.

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:
$u(x) = -\exp(-\frac{\beta}{2}x)$.

Maksimum oczekiwanej użyteczności podmiot ten osiągnie wybierając kontrakt z udziałem własnym w każdej szkodzie *d* równym:

(A) $\frac{2\lambda \ln(1+\theta)}{\beta}$

(B) $\frac{2\ln(1+\theta)}{\beta}$

(C) $\frac{\ln(1+\theta)}{\beta}$

(D) $\frac{\ln(1+\theta)}{2\beta}$

(E) $\frac{\lambda \ln(1+\theta)}{2\beta}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 31 maja 2010 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I...................................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	D	
3	A	
4	D	
5	C	
6	C	
7	B	
8	A	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.