

Zadanie 1

Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, a zmienna losowa Y rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2. Obie zmienne są niezależne. Oblicz $E(Y | X + Y = 3)$.

- (A) 1,86
- (B) 2,16
- (C) 1,50
- (D) 2,00
- (E) 2,50

Zadanie 2

Niech $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,2)$. Niech zmienna losowa N oznacza numer pierwszej ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ o wartości większej niż X_0 , zatem

$$N = \inf \{n : n \in \{1, 2, \dots\} \wedge X_n > X_0\}.$$

Wtedy EX_N jest równa

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{5}{4}$

Zadanie 3

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m + \theta, 1)$, a Y_1, Y_2, \dots, Y_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m - \theta, 1)$. Wszystkie zmienne są niezależne. Parametry m i θ są nieznane. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 0$ przy alternatywie $H_1 : \theta = 0,5$ za pomocą testu opartego na ilorazie wiarygodności na poziomie istotności 0,05. Moc tego testu przy $n = 18$ jest równa

- (A) 0,899
- (B) 0,950
- (C) 0,913
- (D) 0,995
- (E) 0,500

Zadanie 4

Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_N , przy czym zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_N są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej N . Każda ze zmiennych losowych X_i ma rozkład Pareto o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 1, \\ 0 & \text{gdy } x \leq 1 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Obserwujemy tylko te spośród zmiennych X_1, X_2, \dots, X_N , które są większe od znanej liczby $w > 1$. Nie wiemy ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości. Niech y_1, y_2, \dots, y_k będą zaobserwowanymi wartościami. Na podstawie tych danych wyznaczyć estymatory największej wiarygodności parametrów θ i λ .

$$(A) \quad \hat{\theta} = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \ln y_i - 2k \ln w} \quad \text{i} \quad \hat{\lambda} = k(w^{\hat{\theta}} - 1)$$

$$(B) \quad \hat{\theta} = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \ln y_i - 2k \ln w} \quad \text{i} \quad \hat{\lambda} = kw^{\hat{\theta}}$$

$$(C) \quad \hat{\theta} = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \ln y_i} \quad \text{i} \quad \hat{\lambda} = kw^{\hat{\theta}}$$

$$(D) \quad \hat{\theta} = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \ln y_i - \ln w} \quad \text{i} \quad \hat{\lambda} = k(w^{\hat{\theta}} - 1)$$

$$(E) \quad \hat{\theta} = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \ln y_i - k \ln w} \quad \text{i} \quad \hat{\lambda} = kw^{\hat{\theta}}$$

Zadanie 5

Łańcuch Markowa ma trzy stany: E_1, E_2, E_3 , i macierz przejścia

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Niech X_n oznacza stan, w którym znajduje się łańcuch po dokonaniu n kroków, $n = 0, 1, \dots$.

Funkcję f na zbiorze stanów określamy wzorem: $f(E_i) = i$ dla $i = 1, 2, 3$.

Niech $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}[f(X_n), f(X_{n+1})]$. Granica c jest równa

(A) $-\frac{17}{64}$

(B) 0

(C) $-\frac{15}{64}$

(D) $-\frac{21}{64}$

(E) $-\frac{19}{64}$

Zadanie 6

Rozważmy zmienne losowe N, X, Y . Wiadomo, że rozkład warunkowy zmiennej losowej N , gdy $X = x$ i $Y = y$ jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej x . Rozkład warunkowy zmiennej losowej X , gdy $Y = y$ jest rozkładem $Gamma(2, y)$, a rozkład zmiennej Y jest rozkładem $Gamma(4, 3)$, gdzie rozkład $Gamma(\alpha, \beta)$ ma gęstość

$$p_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0. \end{cases}$$

Wtedy wariancja $VarN$ jest równa

- (A) 2
- (B) 7
- (C) 3
- (D) 6
- (E) 5

Zadanie 7

Niech X_1, X_2, \dots, X_{13} będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $N(m, 1)$. Parametr m jest nieznanym i jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(1, 3)$. Wyznaczamy estymator bayesowski parametru m przy funkcji straty LINEX danej wzorem

$$L(m, a) = e^{m-a} - (m - a) - 1,$$

gdzie a oznacza wartość estymatora.

Założmy, że w wyniku doświadczenia uzyskano próbkę losową taką, że $\sum_{i=1}^{13} X_i = 15$.

Wtedy estymator bayesowski przyjmuje wartość

(A) $\frac{27}{20}$

(B) $\frac{37}{32}$

(C) $\frac{18}{16}$

(D) $\frac{23}{20}$

(E) $\frac{19}{16}$

Zadanie 8

W pewnej populacji prawdopodobieństwo tego, że osobnik przeżyje pierwszy rok jest równe $(1 - \theta^2)$. Jeżeli osobnik przeżył pierwszy rok, to prawdopodobieństwo warunkowe tego, że przeżyje następny rok jest równe $\frac{2\theta}{1+\theta}$.

W próbce losowej liczącej n osobników z tej populacji zanotowano:

- n_0 przypadków, kiedy osobnik nie przeżył pierwszego roku,
- n_1 przypadków, kiedy osobnik przeżył pierwszy rok, ale nie przeżył drugiego roku,
- n_2 przypadków, kiedy osobnik przeżył dwa lata.

Błąd średniokwadratowy estymatora największej wiarygodności parametru θ wyraża się wzorem:

(A) $\frac{\theta^2(1-\theta^2)}{2n}$

(B) $\frac{\theta(1-\theta)(1+2\theta^2)}{2n}$

(C) $\frac{\theta(1-\theta)}{2n}$

(D) $\frac{\theta^2(1-\theta^2)}{n}$

(E) $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$

Zadanie 9

Mamy próbę prostą $((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_{10}, Y_{10}))$ z rozkładu normalnego dwuwymiarowego o nieznanach parametrach:

$$EX_i = EY_i = \mu, \quad \text{Var}X_i = \text{Var}Y_i = \sigma^2, \quad \text{Cov}(X_i, Y_i) = \sigma^2 \rho.$$

Niech

$$Z_i = X_i + Y_i, \quad R_i = X_i - Y_i, \quad S_Z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (Z_i - \bar{Z})^2, \quad S_R^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (R_i - \bar{R})^2,$$

gdzie \bar{Z} oraz \bar{R} to odpowiednie średnie z próbki. Do testowania hipotezy $H_0 : \rho = \frac{1}{3}$

przeciwko alternatywie $H_1 : \rho \neq \frac{1}{3}$ możemy użyć testu o obszarze krytycznym postaci:

$$\frac{S_Z^2}{S_R^2} < k_1 \quad \text{lub} \quad \frac{S_Z^2}{S_R^2} > k_2,$$

przy czym liczby k_1 i k_2 dobrane są tak, aby przy założeniu, że H_0 jest prawdziwa

$$P\left(\frac{S_Z^2}{S_R^2} < k_1\right) = P\left(\frac{S_Z^2}{S_R^2} > k_2\right) = 0,05.$$

Liczby k_1 i k_2 są równe:

- (A) $k_1 = 0,157$ i $k_2 = 1,589$
- (B) $k_1 = 0,440$ i $k_2 = 4,451$
- (C) $k_1 = 0,225$ i $k_2 = 2,271$
- (D) $k_1 = 0,629$ i $k_2 = 6,358$
- (E) $k_1 = 0,672$ i $k_2 = 5,956$

Zadanie 10

Z urny, w której jest 6 kul czarnych i 4 białe losujemy kolejno bez zwracania po jednej kuli tak długo, aż wylosujemy kulę czarną. Wartość oczekiwana liczby wylosowanych kul białych jest równa

- (A) 1
- (B) $\frac{4}{7}$
- (C) $\frac{11}{7}$
- (D) $\frac{4}{6}$
- (E) $\frac{10}{6}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 31 maja 2010 r.**Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi* T**

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI.....
PeSEL

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	C	
3	C	
4	E	
5	D	
6	B	
7	E	
8	C	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.