

Zadanie 1.

Zmienna losowa:

$$X = Y_1 + \dots + Y_N$$

ma złożony rozkład Poissona. W tabeli poniżej podano rozkład prawdopodobieństwa składnika sumy Y_1 . W tejże tabeli podano także obliczone dla $k = 0, 1, \dots, 4$ prawdopodobieństwa $\Pr(X = k)$.

k	$\Pr(Y_1 = k)$	$\Pr(X = k)$
0	0	0.36788
1	0.2	0.07358
2	0.3	0.11772
3	0.2	0.09614
4	0.1	0.07029
5	0.2	

Wobec tego $\Pr(X = 5)$ z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 0.100
- (B) 0.104
- (C) 0.108
- (D) 0.112
- (E) 0.116

Zadanie 2.

Proces pojawiania się szkód w czasie $N(t)$ jest procesem o przyrostach niezależnych, o rozkładzie ujemnym dwumianowym danym dla każdego nieujemnego t oraz dodatniego s wzorem:

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = k) = \frac{\Gamma(r \cdot s + k)}{k! \Gamma(r \cdot s)} \cdot (1-q)^{r \cdot s} \cdot q^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

gdzie $r = 5$ oraz $q = \frac{3}{4}$ to parametry procesu.

Oblicz granicę prawdopodobieństw warunkowych:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Pr(N(t+s) - N(t) = 1 | N(t+s) - N(t) > 0)$$

(A) 1

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{8}$

(D) $\frac{3}{8 \ln 2}$

(E) $\frac{2}{3 \ln 2}$

Zadanie 3.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową $U(t) = ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t ,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód,
- wartości szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0,1]) = 1$,
- $E(Y_1) = 1/10$.

Wiemy też, że $c > \frac{\lambda}{10}$.

Wobec tego wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) może przyjmować różne wartości. Przedział, który zawiera wszystkie te wartości (i nic ponadto) jest postaci:

(A) $\left[\frac{1}{20}, \frac{1}{10} \right]$

(B) $\left[\frac{1}{30}, \frac{1}{3} \right]$

(C) $\left[\frac{1}{20}, \frac{1}{2} \right]$

(D) $\left[\frac{1}{30}, \frac{1}{10} \right]$

(E) $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{2} \right]$

Zadanie 4.

W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, liniowym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna $T_1 \in (0,1)$ wyrażająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany gęstością:

- $f_1(t) = \frac{6}{7} + \frac{2}{7}t$.

Niech T_2 oznacza odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 3 (lata).

Zakładamy że zmienne losowe T_1 oraz T_2 są niezależne. Prawdopodobieństwo, iż szkoda, do której doszło w ciągu roku, pozostanie nie-zlikwidowana na koniec tego roku, z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 71.7%
- (B) 78.5%
- (C) 82.8%
- (D) 84.6%
- (E) 85.7%

Zadanie 5.

W pewnym portfelu ryzyk łączna wartość szkód:

$$W = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$$

ma złożony rozkład Poissona o parametrze częstotliwości $\lambda = 100$ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y wykładniczym z wartością oczekiwaną $E(Y) = 10$.

Niech:

$$W_M = \min\{Y_1, M\} + \dots + \min\{Y_N, M\},$$

gdzie W_M oznacza tę część łącznej wartości szkód W , która pozostaje na udziale ubezpieczyciela po scedowaniu nadwyżki każdej szkody z tego portfela ponad M na reasekuratora. Aktualnie parametrem kontraktu reasekuracyjnego jest wartość zachowku $M = 50$. Rozważamy jednak możliwość zmiany tego parametru, oraz wpływ takiej zmiany na charakterystyki zmiennej losowej W_M .

Pochodna wariancji zmiennej W_M :

$$\left. \frac{\partial \text{Var}(W_M)}{\partial M} \right|_{M=50}$$

wynosi (w przybliżeniu do jedynek):

- (B) 50
- (C) 55
- (D) 61
- (D) 67
- (E) 75

Zadanie 6.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

$$\bullet \quad U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n,$$

gdzie zmienne W_1, W_2, W_3, \dots są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą jeden.

Jeśli parametry procesu wynoszą:

- $c = 2 \ln 2$
- $u = 4 \ln 2$

to prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu wynosi:

(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{1}{8\sqrt{2}}$

(C) $\frac{1}{16}$

(D) $\frac{1}{16\sqrt{2}}$

(E) $\frac{1}{32}$

Zadanie 7.

Oznaczmy przez X_t łączną wartość szkód zaistniałych w roku t , przez $X_{t,0}$ tę jej część, która dotyczy szkód zlikwidowanych przed końcem roku t , zaś przez $X_{t,1}$ część pozostałą. Warunkowe momenty tych zmiennych (przy danej wartości parametru ryzyka μ_t) spełniają założenia:

- $E(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t p$
- $E(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t(1-p)$
- $Var(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t p b^2$
- $Var(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t(1-p)b^2$
- $Cov(X_{t,0}, X_{t,1}|\mu_t) = 0$,

zaś rozkład parametru ryzyka μ_t spełnia założenia:

- $E(\mu_t) = \mu$
- $Var(\mu_t) = a^2$

Najlepszy nieobciążony liniowy predyktor zmiennej $X_{t,1}$ oparty na informacji o zmiennej $X_{t,0}$ oraz znanych wartościach parametrów (p, b^2, μ, a^2) jest postaci:

- $BLUP(X_{t,1}|X_{t,0}) = cX_{t,0} + d$

Współczynnik c występujący w powyższym wzorze jest postaci:

$$(A) \quad c = \frac{(1-p)a^2}{p(\mu b^2 + a^2)}$$

$$(B) \quad c = \frac{(1-p)a^2}{\mu b^2 + p a^2}$$

$$(C) \quad c = \frac{(1-p)p a^2}{\mu b^2 + p^2 a^2}$$

$$(D) \quad c = \frac{(1-p)a^2}{b^2 + p a^2}$$

$$(E) \quad c = \frac{(1-p)p a^2}{b^2 + p^2 a^2}$$

Zadanie 8.

N, Y_1, Y_2, Y_3, \dots to niezależne zmienne losowe, N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 10, zaś Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają identyczny rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi dodatniej wzorem:

$$\bullet \quad F(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y} \right)^3$$

Niech $M = \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$, przy czym jeśli $N = 0$, to przyjmujemy $M = 0$.

Niech $m_{0,95}$ oznacza taką liczbę, że $\Pr(M \leq m_{0,95}) = 0.95$

Liczba $m_{0,95}$ wynosi (z przybliżeniem do jednej dziesiątej):

- (A) 2.8
- (B) 3.8
- (C) 4.8
- (D) 5.8
- (E) 6.8

Zadanie 9.

W pewnym ubezpieczeniu proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą 2, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład ciągły o gęstości równej 1 na przedziale $(0, 1)$.

Ubezpieczony stosuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:

- Nie zgłasza szkód, dopóki nie zdarzy mu się szkoda o wartości przekraczającej $\frac{1}{2}$
- Zgłasza pierwszą szkodę, która przekroczyła wartość $\frac{1}{2}$, po czym zgłasza ewentualne następne szkody bez względu na to, jaka jest ich wartość.

Charakter ubezpieczenia jest przy tym taki, że decyzja o niezgłoszeniu danej szkody jest nieodwołalna – nie ma więc możliwości zgłoszenia danej szkody dopiero wtedy, kiedy zajdzie któraś z następnych szkód.

Oczekiwana wartość szkód zgłoszonych w ciągu roku z tego ubezpieczenia wynosi (z dobrym przybliżeniem):

- (A) 0.75
- (B) 0.77
- (C) 0.79
- (D) 0.82
- (E) 0.84

Zadanie 10.

Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w , i narażony jest na stratę X . Strata X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

$$\Pr(X = 1) = q, \Pr(X = 0) = 1 - q$$

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty ubezpieczeniowe wypłacające αX za szkodę w wysokości X dla dowolnych $\alpha \in (0, 1]$, w zamian za składkę w wysokości $(1 + \theta) \cdot q \cdot \alpha$.

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:

$$u(x) = -\exp(-x).$$

Jeśli założymy, że $\theta = 25\%$, zaś $q = 20\%$, wtedy podmiot, o którym mowa, osiągnie maksimum oczekiwanej użyteczności wybierając kontrakt z pokryciem równym (wybierz najlepsze przybliżenie):

- (A) $\alpha \approx 67\%$
- (B) $\alpha \approx 71\%$
- (C) $\alpha \approx 73\%$
- (D) $\alpha \approx 76\%$
- (E) $\alpha \approx 78\%$

Egzamin dla Aktuariuszy z 4 października 2010 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	D	
3	C	
4	E	
5	D	
6	A	
7	B	
8	C	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.