

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LV Egzamin dla Aktuariuszy z 13 grudnia 2010 r.**

**Część I**

**Matematyka finansowa**

**WERSJA TESTU A**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Pan Jan przystępuje do Funduszu Inwestycyjnego z kwotą początkową  $S_0$ . Fundusz działa w następujący sposób: każdego dnia  $n = 1, 2, \dots$ , do kwoty początkowej może być dodana kwota  $X_n = A$  PLN z prawdopodobieństwem  $p \in [0, 1]$  lub odjęta kwota  $X_n = B$  PLN z prawdopodobieństwem  $q \in [0, 1]$ ,  $A, B > 0$ . Każdego dnia ma miejsce albo powiększenie albo pomniejszenie funduszu i zdarzenia te są niezależne. Załóżmy, że Pan Jan każdego dnia ma informację o tym, czy kwota  $X_n$  została dodana czy odjęta. Zdefiniujmy proces  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  stanu funduszu Pana Jana na dzień  $n$ , jako  $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n X_k$  i rozważmy następujące stwierdzenia.
- (i) Proces  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ .
  - (ii) Proces  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  jeżeli początkowa kwota wynosiłaby  $S_0 = 0$  PLN.
  - (iii) Proces  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  jeżeli początkowa kwota wynosiłaby  $S_0 = 0$  PLN, zaś  $p = q = \frac{1}{2}$ , niezależnie od wysokości wpłat/wypłat  $A, B$ .
  - (iv) Proces  $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$  zwrotów z funduszu określony jako  $Z_n = S_n - S_0 = \sum_{k=1}^n X_k$  jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  dla dowolnej kwoty początkowej i dowolnych  $p, q > 0$ ,  $p + q = 1$ , jeżeli  $A = B = 1$  PLN.
  - (v) Proces  $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$  zwrotów z funduszu określony jako  $Z_n = S_n - S_0 = \sum_{k=1}^n X_k$  jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  dla dowolnej kwoty początkowej i  $p = \frac{B}{A+B}$ ,  $q = \frac{A}{A+B}$ .

Spośród powyższych stwierdzeń prawdziwych jest:

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

- 
2. Dana jest renta wieczysta wypłacająca na koniec roku  $k$  kwotę  $k(-1)^k + a$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots$ , zaś  $a > 0$  jest pewną liczbą. Przy jakiej wartości parametru  $a$  wartość obecna tej renty wynosi zero? Do obliczeń przyjmij roczną efektywną stopę dyskontową  $i = 4\%$ . Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

- A) 0.05
- B) 0.04
- C) 0.03
- D) 0.02
- E) 0.01

3. Rozważamy dwie terminowe renty odroczone A i B, płacące równe raty na koniec każdego roku w okresie wypłacania renty. Wiadomo, że:

- renta A rozpoczyna wypłaty 3 lata wcześniej niż renta B,
- renta B kończy wypłaty 5 lat po zakończeniu wypłat renty A,
- rata renty B jest o 20% większa od raty renty A,
- $\lim_{i \rightarrow \infty} d(A+B) = 10$ ,  $\lim_{i \rightarrow 0} d(A+B) = \frac{568}{31}$ , gdzie  $d(A+B)$  oznacza *duration* ciągu płatności generowanego przez obie renty A i B.
- przy założeniu, że renta A stanowi spłatę kredytu oprocentowanego na poziomie 5%, suma odsetek zapłaconych we wszystkich ratach renty A wynosi 360,64.

Oblicz różnicę pomiędzy obecną wartością renty B i obecną wartością renty A (wartość B – wartość A), przyjmując, że stopa procentowa wynosi 5%.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 82
- B) 84
- C) 86
- D) 88
- E) 90

4. Pożyczka jest spłacana za pomocą 20 rat płatnych na końcu każdego roku. Raty w pierwszych 10 latach są malejące i wynoszą 20, 18, 16, 14, ..., 2. Raty w drugim dziesięcioleciu są rosnące i wynoszą 3,  $3 \cdot 1,5$ ,  $3 \cdot (1,5)^2$ , ...,  $3 \cdot (1,5)^9$ . Stopa procentowa jest równa  $i$ . Wyznacz sumę odsetek zapłaconych w ratach 3 i 7 oraz wartości kapitału spłaconego w racie 14. Wskaż właściwy wzór.

A)

$$a_{\overline{8}|i} (4i - 2) + a_{\overline{4}|i} (8i - 2) + 8v^4(1 + 2v^2) + 3iv^5 \frac{1 - (1,5v)^7}{1 - 1,5v} (1 + v^4) + \frac{81}{8} (1 - vi \frac{1 - (1,5v)^{10}}{1 - 1,5v})$$

B)

$$a_{\overline{8}|i} (16i - 2) + a_{\overline{4}|i} (8i - 4) + 4v^4(1 + 2v^4) + 3iv^7 \frac{1 - (1,5v)^{10}}{1 - 1,5v} (1 + v^4) + \frac{81}{8} (1 - vi \frac{1 - (1,5v)^5}{1 - 1,5v})$$

C)

$$a_{\overline{8}|i} (16i - 2) + a_{\overline{4}|i} (4i - 2) + 8v^4(1 + v^4) + 3iv^7 \frac{1 - (1,5v)^{10}}{1 - 1,5v} (1 + v^4) + \frac{81}{8} (1 - vi \frac{1 - (1,5v)^7}{1 - 1,5v})$$

D)

$$a_{\overline{8}|i} (8i - 2) + a_{\overline{4}|i} (16i - 2) + 8v^4(1 + v^4) + 3iv^5 \frac{1 - (1,5v)^7}{1 - 1,5v} (1 + v^4) + \frac{81}{8} (1 - vi \frac{1 - (1,5v)^{10}}{1 - 1,5v})$$

E)

$$a_{\overline{8}|i} (16i - 2) + a_{\overline{4}|i} (8i - 2) + 8v^4(1 + 2v^4) + 3iv^5 \frac{1 - (1,5v)^{10}}{1 - 1,5v} (1 + v^4) + \frac{81}{8} (1 - vi \frac{1 - (1,5v)^7}{1 - 1,5v})$$

5. Kredyt o wartości 100 000, oprocentowany na poziomie 6%, może być spłacony na dwa sposoby, rentami płatnymi na końcu każdego roku.

Sposób 1:

- kredyt spłacany jest przez 7 lat,
- każda rata kredytu począwszy od drugiej jest większa od poprzedniej o stałą wartość  $R$ ,

Sposób 2:

- kredyt spłacany jest przez 18 lat,
- pierwsza rata jest taka sama jak w Sposobie 1,
- kolejne raty maleją o wartość  $R$ .

Wiadomo, że gdyby spłacać ten kredyt równymi ratami płatnymi na końcu roku, a wysokość raty byłaby równa wysokości pierwszej raty w sposobie 1, to należałoby dokonać 8 regularnych wpłat oraz uzupełnić je dodatkową płatnością w wysokości 6914.73 na końcu 9 roku.

Wskaż wartość  $R$ .

- A) 862.1
- B) 872.1
- C) 882.1
- D) 892.1
- E) nie istnieje  $R$  spełniające warunki zadania

**6.** Inwestor kupił w dniu emisji dwie obligacje:

- 5 letnią obligację zero kuponową o wartości wykupu 50 000,
- 10 letnią obligację o wartości wykupu 60 000, wypłacającą (na końcu roku) w latach nieparzystych kupon o wartości 3 000, a w latach parzystych kupon o wartości 4 000.

Obligacja zero kuponowa została kupiona z 7.5% dyskontem, natomiast cena zakupu drugiej obligacji została ustalona przy stopie procentowej 7%.

Inwestycja została sfinansowana w 70% za pomocą kredytu oprocentowanego na poziomie 6%, natomiast pozostałą część inwestor opłacił z własnych środków.

Odsetki otrzymane z obligacji są reinwestowane w funduszu inwestycyjnym, którego stopa zwrotu wynosi 7%.

Na końcu 5 roku trwania inwestycji inwestor sprzedał obie obligacje, przy czym cena sprzedaży obligacji 10 letniej została ustalona przy stopie procentowej 6%. Uzyskane środki inwestor natychmiast umieścił w funduszu inwestycyjnym.

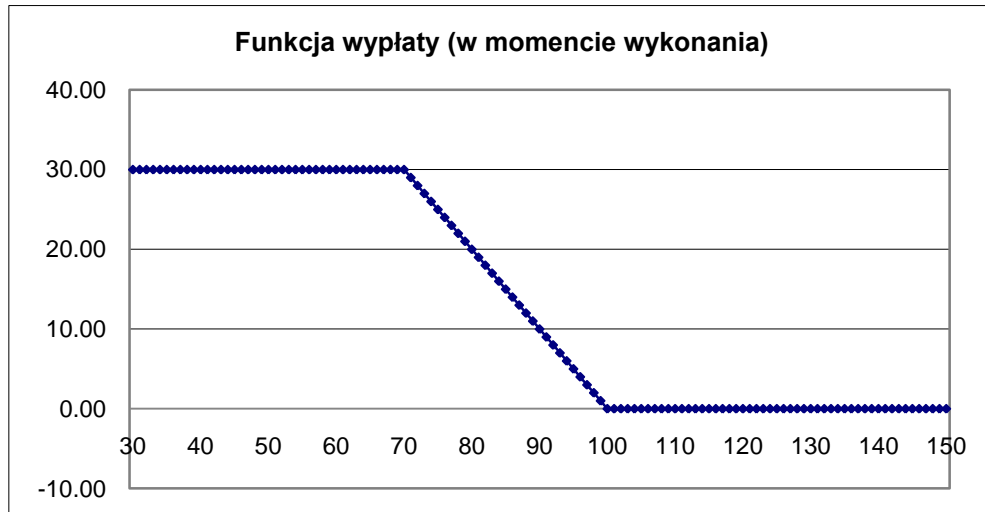
Po upływie następnych 2 lat inwestor wycofał wszystkie środki z funduszu inwestycyjnego i spłacił kredyt w całości wraz z należnymi odsetkami.

Oblicz efektywną (roczną) stopę zwrotu z zainwestowanych środków własnych.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 4.7%
- B) 5.0%
- C) 5.3%
- D) 5.6%
- E) 5.9%

7. Inwestor stosuje strategię typu *spread niedźwiedzia (Bear spread)* zbudowaną w oparciu o europejskie opcje kupna o okresie wykonania 8 lat. Uwzględniająca koszty przyjęcia pozycji w opcjach wypłata, w zależności od ceny  $S_8$  instrumentu bazowego w momencie wykonania, przedstawiona jest na rysunku:



Obecne ( $t=0$ ) ceny europejskich opcji sprzedaży wystawionych na instrument bazowy o kursie bieżącym  $S_0=95$ , okresie wykonania 8 lat i cenie wykonania  $X$  przedstawione są w tabeli:

Cena wykonania $X$	Cena opcji sprzedaży
70	0.0124
95	0.0174
100	0.0220

Zmienność  $\sigma$  (*volatility*) instrumentu bazowego jest równa 20%, wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi 5% (kapitalizacja ciągła).

Obecny koszt, jaki poniósł inwestor przyjmując strategię *niedźwiedzia* wynosi (podaj najbliższą wartość):

- A) - 29.99
- B) - 21.77
- C) - 20.10
- D) 0.02
- E) 16.75

Uwaga: Ujemny koszt oznacza premię.



8. Inwestor działający na rynku opcji na akcje otrzymał w momencie  $t=0$  następujące kwotowania:

- obecna cena akcji A: 100 PLN,
- zmienność (*volatility*) ceny akcji jest stała i wynosi 25%
- intensywność wolnego od ryzyka oprocentowania jest stała i wynosi 5% w skali roku,
- europejska opcja kupna na 1 akcję A z ceną wykonania 95 PLN, wygasająca za 6 miesięcy kosztuje 7.34 PLN,
- europejska opcja sprzedaży na 1 akcję A z ceną wykonania 95 PLN, wygasająca za 6 miesięcy kosztuje 0.75 PLN.

Inwestor uważa, że wykorzystując jedną akcję A istnieje możliwość zrealizowania zysku arbitrażowego. Strategia arbitrażowa ma opierać się na zajęciu odpowiednich pozycji na rynku opcji oraz na rynku akcji i instrumentów wolnych od ryzyka. Zysk arbitrażowy na moment  $t=0$  wynosi (do obliczeń przyjmij kapitalizację ciągłą, dopuszczamy możliwość krótkiej sprzedaży akcji bez kosztów transakcyjnych):

- A) 0.513 PLN
- B) 0.756 PLN
- C) 0.775 PLN
- D) 6.757 PLN
- E) 7.526 PLN

9. Niech  $S(t)$  będzie ceną spot akcji w chwili (roku)  $t$ . Akcja ta nie wypłaca dywidendy w najbliższym roku. Rozważmy kontrakt, który po roku daje posiadaczowi wypłatę  $S(1)^3/S(0)$ . Intensywność oprocentowania ciągłego wynosi 4% w skali roku, a zmienność  $\sigma$  ceny akcji wynosi 40%. Zakładamy ponadto, że cena akcji opisana jest przez proces:

$$S(t) = A(t) \cdot \exp(\sigma\sqrt{t}Z), \quad t > 0,$$

gdzie  $Z \sim N(0,1)$ , a  $A(t) > 0$  jest pewną funkcją rzeczywistą i rynek nie dopuszcza arbitrażu. Wyznaczyc cenę kontraktu w chwili 0. Podaj najbliższą odpowiedź.

- A)  $S^2(0) \cdot \exp(1.28)$
- B)  $S^2(0) \cdot \exp(0.64)$
- C)  $S^2(0) \cdot \exp(0.56)$
- D)  $S^2(0)$
- E)  $S^2(0) \cdot \exp(-0.1)$

**10.** Dwuletnia obligacja korporacyjna o nominale 1 000 i kuponie 7% płatym rocznie jest wyceniana w momencie emisji na kwotę 973.16. Ponadto, wiadomo, że:

- roczna obligacja rządowa o nominale 1 000 z 5% kuponem płatym rocznie wyceniona jest w momencie emisji na kwotę 1 000,
- dwuletnia obligacja rządowa o nominale 1 000 z 5% kuponem płatym rocznie jest wyceniona w momencie emisji na kwotę 1 009.16.

Założmy, że obligacje rządowe wyceniane są przy użyciu stóp wolnych od ryzyka. Jakiego stałego w czasie narzutu na ryzyko kredytowe używa rynek przy wycenie tej obligacji? Podaj najbliższą odpowiedź:

- A) 2.50%
- B) 3.00%
- C) 3.50%
- D) 4.00%
- E) 4.50%

**Egzamin dla Aktuariuszy z 13 grudnia 2010 r.****Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko: .....

Pesel: .....

OZNACZENIE WERSJI TESTU .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	D	
4	E	
5	D	
6	A	
7	C	
8	B	
9	C	
10	D	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.