Zadanie 1.
Liczba szkód N ma rozkład o prawdopodobieństwach spełniających zależność rekurencyjną:

$$\frac{\Pr(N=k)}{\Pr(N=k-1)}=\frac{1}{5}\cdot\left(2+\frac{4}{k}\right), \qquad k=1,2,3,...$$

Jeśli wiemy, że $\sum_{k=0}^{\infty}\Pr(N=k)=1$, to wartość oczekiwana liczby szkód $\mathrm{E}(N)$ wynosi:

(A) 1

(B) $1\frac{1}{3}$

(C) 2

(D) 3

(E) $4\frac{1}{2}$

Zadanie 2.
W poniższej tabeli zawarte są wybrane informacje o rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y:

y	3	4
$\mathrm{E}(\min\{Y, y\})$	2	$\frac{7}{3}$
$\Pr(Y \le y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Z informacji tych wynika, że $\mathrm{E}(Y \mid 3 < Y \le 4)$ wynosi:

(A) $3\frac{1}{4}$

(B) $3\frac{1}{3}$

(C) $3\frac{1}{2}$

(D) $3\frac{2}{3}$

(E) $3\frac{3}{4}$

Zadanie 3.
Łączna wartość szkód X z pewnego ryzyka miała w roku ubiegłym rozkład złożony:

$$X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N ,$$

z rozkładem wartości pojedynczej szkody danym na półosi dodatniej gęstością:

$$f_Y(x) = \frac{3}{(1+x)^4} .$$

O ile procent wzrośnie składka netto za pokrycie nadwyżki każdej szkody z tego ryzyka ponad kwotę d, jeśli kwota ta jest niezmienna i wynosi $d = 5$, natomiast ceny, w których wyrażone są szkody wzrosną w nadchodzącym roku o 25% (tzn. do poziomu równego 5/4 cen roku ubiegłego)?

(A) składka netto wzrośnie o $33\frac{1}{3}\%$

(B) składka netto wzrośnie o 50%

(C) składka netto wzrośnie o $66\frac{2}{3}\%$

(D) składka netto wzrośnie o 80%

(E) składka netto wzrośnie o 90%

Zadanie 4.
Zmienne X_0 oraz X_1 reprezentują łączną wartość szkód z pewnego portfela ryzyk odpowiednio w roku ubiegłym oraz roku nadchodzącym. Zmienne te są (przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ) zmiennymi losowymi warunkowo niezależnymi, o rozkładach złożonych Poissona z taką samą oczekiwaną liczbą szkód λ i takim samym rozkładem wartości pojedynczej szkody *Y*, o charakterystykach:

- $\mathrm{E}(Y) = \mu$, $\mathrm{var}(Y) = \sigma^2$.

Parametr ryzyka Λ ma rozkład, o którym wiemy, że:

- $\mathrm{E}(\Lambda) = \overline{\Lambda}$, $\mathrm{var}(\Lambda) = L^2$.

Rozważamy predykcję łącznej wartości szkód w roku nadchodzącym X_1 przy założeniu, że znamy wartości parametrów μ, σ^2, $\overline{\Lambda}$ oraz L^2, a także iż w ubiegłym roku zaobserwowaliśmy liczbę szkód N_0 oraz łączną wartość szkód X_0.
Najlepszy liniowy nieobciążony predyktor to predyktor postaci:

- $BLUP(X_1 | N_0, X_0) = X_0 \cdot z_X + N_0 \cdot \mu \cdot z_N + \overline{\Lambda} \cdot \mu \cdot (1 - z_X - z_N)$,

gdzie współczynniki z_N oraz z_X dobrane są tak, aby zminimalizować błąd średniokwadratowy predykcji:

- $E\left\{\left[X_1 - pred(X_1 | N_0, X_0)\right]^2\right\}$.

Wobec tego współczynnik z_X wynosi:

(A) $\dfrac{\overline{\Lambda} + L^2}{\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right) + L^2}$

(B) $\dfrac{\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right)}{\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right) + L^2}$

(C) $\dfrac{\overline{\Lambda}}{\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right) + L^2}$

(D) $\dfrac{L^2}{\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right) + L^2}$

(E) 0

Zadanie 5.
X_1 oraz X_2 to dwa ryzyka (zmienne losowe) niezależne o tym samym rozkładzie danym dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & gdy \quad x < 0 \\ 0.5 + 0.3 \cdot x & gdy \quad x \in [0, 1) \\ 1 & gdy \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo:

$$\Pr\left(X_1 + X_2 \leq \frac{2}{3} \right)$$

wynosi:

(A) 0.4700

(B) 0.4725

(C) 0.4750

(D) 0.4775

(E) 0.4800

Zadanie 6.
Dana jest rodzina zmiennych losowych $\{Y_M\}_{M\in(0,1]}$ indeksowana parametrem M o dystrybuantach:

$$F_M(y)=\begin{cases} y & gdy \quad y<M \\ 1 & gdy \quad y\geq M \end{cases}, \qquad M\in(0,1],$$

oraz rodzina zmiennych $\{W_M\}_{M\in(0,1]}$ o rozkładach złożonych Poissona o parametrach $(\lambda, F_M(\cdot))$.

Niech $V^2(W_M)$ oznacza dla dowolnego $M\in(0,1]$ kwadrat współczynnika zmienności (stosunek wariancji do kwadratu wartości oczekiwanej) zmiennej W_M. Pochodną logarytmiczną współczynnika $V^2(W_M)$ można wyrazić wzorem:

$$\frac{\partial}{\partial M}\ln\left(V^2(W_M)\right)=\frac{1-M}{(a-M)(b-M)}, \quad M\in(0,1).$$

Parametry (a,b) powyższego wzoru są równe (kolejność podania parametrów jest oczywiście obojętna):

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(B) $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(C) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

(D) $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

(E) $(2, 3)$

Zadanie 7.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 100$, zaś rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:
$$f_Y(x) = \frac{3}{16}\exp\left(-\frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{32}\exp\left(-\frac{1}{8}x\right)$$
- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 750$,

Wiadomo, że przy takich założeniach funkcja prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcja wysokości nadwyżki początkowej u) jest postaci:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u),$$

Suma parametrów tego wzoru $(a_1 + a_2)$ wynosi:

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

Zadanie 8.

Wiemy, że w procesie nadwyżki ubezpieczyciela składka roczna wynosi c, zaś łączne wartości szkód w ciągu kolejnych lat to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie. Rozkład ten ma wartość oczekiwaną równą μ, wariancję równą σ^2, oraz współczynnik skośności o wartości nieujemnej równej γ.

Funkcję prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcję wysokości nadwyżki początkowej u) przybliżamy na dwa sposoby:

- Stosując aproksymację $\Psi_{diff}(u)$, oparte na znanych wynikach dla modelu, w którym przyrosty procesu nadwyżki na dowolnych rozłącznych odcinkach czasu są niezależne, i dla dowolnego $h > 0$ mają rozkład normalny o wartości oczekiwanej równej $h(c-\mu)$ i wariancji $h\sigma^2$. (*Oznacza to oczywiście, że ignorujemy informację o skośności*)
- Stosując aproksymację $\Psi_{dV}(u)$, oparte na znanych wynikach dla modelu, w którym proces narastania szkód jest procesem złożonym Poissona ze szkodami wykładniczymi, z parametrami dobranymi tak, aby roczne przyrosty procesu miały rozkład o wartości oczekiwanej, wariancji i skośności równej zadanym wartościom $(c-\mu)$, σ^2, oraz γ.

Niech u^* oznacza taką wartość nadwyżki początkowej u, dla której zachodzi:

$$\Psi_{diff}(u) = \Psi_{dV}(u)$$

Przy założeniach liczbowych:

- $\mu = 10$, $\sigma = 2$, $c = 11$,

granica wartości u^* przy współczynniku skośności dążącym do zera (od góry):

$$\lim_{\gamma \downarrow 0}\left(u^*\right)$$

wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Zadanie 9.
Modelujemy przebiegający w czasie proces ściągania należności regresowych przez ubezpieczyciela. Niech T oznacza zmienną losową o rozkładzie:

- ciągłym na przedziale $(0,+\infty)$
- z pewną masą prawdopodobieństwa w punkcie $+\infty$,

reprezentującą czas ściągnięcia należności regresowej (liczony od momentu powstania prawa do regresu). Niech f_T, F_T oraz h_T oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej T. Dystrybuancie oraz funkcji hazardu nadajemy następującą interpretację:

- $F_T(t) = \int_0^t f_T(s)ds$ to wskaźnik ściągalności do czasu t (oczywiście $F_T(0) = 0$)
- $\lim_{t\to\infty} F_T(t) = \Pr(T < \infty)$ to wskaźnik ściągalności ostatecznej,
- $h_T(t) = \dfrac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$ dla $t > 0$ to natężenie procesu ściągania (gęstość ściągania należności, które do momentu t pozostają jeszcze nie ściągnięte)

Załóżmy, że natężenie procesu ściągania dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej następująco:

- $h_T(t) = \dfrac{1}{(2+t)(1+t)}$.

Wtedy wskaźnik ściągalności ostatecznej wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{3}{5}$

(E) $\frac{1}{2}$

Wskazówka: możesz wykorzystać znaną tożsamość: $h(t) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\ln(1 - F(t))$

Zadanie 10.
W pewnym ubezpieczeniu szkody zawsze likwidowane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech $X_{t,0}$ oraz $X_{t,1}$ oznaczają łączną wartość szkód zaistniałych w roku *t*, a likwidowanych w tym samym roku oraz w roku następnym, odpowiednio. Mamy w dyspozycji próbkę obserwacji z lat $t = 1,2,...,n$:

- $X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}, X_{2,1},..., X_{n,0}, X_{n,1}$.

Zakładamy, że wszystkie powyższe zmienne są niezależne, i mają rozkłady Gamma o parametrach:

$X_{t,0} \sim \Gamma(\alpha_0, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$,

$X_{t,1} \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$.

Nie znamy wartości parametrów $(\alpha_0, \alpha_1, \beta)$, w istocie jednak interesuje nas jedynie parametr $\mu_0 := \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1}$

Rozważamy dwa estymatory tego parametru:

$$\hat{\mu}_0 := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t,0}}{X_{t,0}+X_{t,1}}, \text{ oraz } \hat{\hat{\mu}}_0 := \frac{\sum_{t=1}^{n}X_{t,0}}{\sum_{t=1}^{n}X_{t,0}+\sum_{t=1}^{n}X_{t,1}}$$

Stosunek wariancji tych estymatorów:

$$\frac{\mathrm{var}(\hat{\mu}_0)}{\mathrm{var}(\hat{\hat{\mu}}_0)}$$

wynosi:

(A) $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}{\alpha_0 + \alpha_1 + 1}$

(B) $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n^2}}$

(C) $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + 1}{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}$

(D) $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n^2}}{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}$

(E) 1

Egzamin dla Aktuariuszy z 13 grudnia 2010 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	D	
4	E	
5	A	
6	C	
7	B	
8	C	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.