Zadanie 1.

Przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ liczby szkód generowane przez ubezpieczającego się w kolejnych latach to niezależne zmienne losowe o rozkładzie Poissona z parametrem λ. Rozkład parametru ryzyka Λ w populacji ubezpieczających się (zakładamy dla uproszczenia, że jest to populacja nieskończona) jest rozkładem Gamma$(2, 10)$, o wartości oczekiwanej równej 2/10.

W roku 1 mieliśmy w portfelu 1000 osób wylosowanych z tej populacji. W roku 2 w naszym portfelu znajduje się ponownie 1000 osób, przy czym 750 osób to losowo dobrana podgrupa z grupy osób ubezpieczonych w roku 1, zaś 250 osób to nowi ubezpieczeni, dolosowani z populacji. Niech N_1 i N_2 oznacza liczbę szkód z naszego portfela w roku 1 i w roku 2, odpowiednio. Wobec tego $\mathrm{E}\left[(N_1 - N_2)^2\right]$ wynosi:

(A) 400

(B) 410

(C) 420

(D) 430

(E) 440

Zadanie 2.
W poniższej tabeli zawarte są wybrane informacje o rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y:

y	2	4
$\mathrm{E}\left[(Y-y)_+\right]$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{8}$
$\Pr(Y \le y)$	$1/4$	$1/2$

Z informacji tych wynika, że $\mathrm{E}(Y|2 < Y \le 4)$ wynosi:

(A) $2\frac{1}{2}$

(B) $2\frac{2}{3}$

(C) 3

(D) $3\frac{1}{3}$

(E) $3\frac{1}{2}$

Zadanie 3.

Niech $X_1, X_2, X_3, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach dwupunktowych postaci:

$$\Pr(X_k = 0) = \frac{k-1}{k}, \quad \Pr(X_k = k) = \frac{1}{k},$$

i niech $W_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ będzie ich sumą częściową.

Granica ciągu współczynników skośności:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{E}\left\{(W_n - \mathrm{E}(W_n))^3\right\}}{\left[\mathrm{var}(W_n)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

wynosi:

(A) 0

(B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{8}{5}$

(E) ∞

Zadanie 4.

Łączna wartość szkód:

- $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$, ($X = 0$ gdy $N = 0$)

ma przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ warunkowy rozkład złożony Poissona o oczekiwanej licznie szkód równej λ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody danym dla $x \geq 0$ dystrybuantą:

- $F_{Y|\Lambda=\lambda}(x) = 1 - \exp\left(-a \cdot \exp(b\lambda) \cdot x\right)$

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład Gamma(α, β), o gęstości:

- $f_\Lambda(x) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$.

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:

- $a = \dfrac{1}{10}$, $b = 1$
- $\alpha = 2$, $\beta = 10$

Wobec tego iloraz:

- $\dfrac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(Y)}$

wynosi:

(A) 1

(B) $\dfrac{11}{12}$

(C) $\dfrac{10}{11}$

(D) $\dfrac{5}{6}$

(E) $\dfrac{9}{11}$

Zadanie 5.
Wiadomo, że zmienne losowe N_1, N_2, N_3 są niezależne, i mają rozkłady określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, spełniające zależności rekurencyjne:

$$\Pr(N_1 = k) = \frac{1}{2} \cdot \Pr(N_1 = k-1), \qquad k = 1,2,3,...$$

$$\Pr(N_2 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) \cdot \Pr(N_2 = k-1), \qquad k = 1,2,3,...$$

$$\Pr(N_3 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right) \cdot \Pr(N_3 = k-1), \qquad k = 1,2,3,...$$

Wobec tego $\Pr(N_1 + N_2 + N_3 = 4)$ wynosi:

(A) $\frac{126}{1024}$

(B) $\frac{112}{1024}$

(C) $\frac{210}{1024}$

(D) $\frac{224}{1024}$

(E) $\frac{252}{1024}$

Zadanie 6.
Każdej jednostce z pewnej populacji przydarzają się szkody zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ (rocznie), pod warunkiem że parametr ryzyka Λ charakteryzujący tę jednostkę wynosi λ. Znamy pierwsze trzy momenty rozkładu zmiennej Λ w tej populacji:
$\mathrm{E}\Lambda = 0.2$, $\mathrm{E}(\Lambda^2) = 0.1$, $\mathrm{E}(\Lambda^3) = 0.08$.
Niech *N* oznacza liczbę szkód wygenerowaną przez (losowo wybraną z tej populacji) jednostkę w ciągu dwóch kolejnych lat. Moment centralny trzeciego rzędu zmiennej zmiennej *N* wynosi:

(A) 0.416

(B) 0.832

(C) 1.124

(D) 1.408

(E) 1.664

Zadanie 7.
Rozważamy zdyskontowany proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$$U(t) = u + c \cdot \int_0^t \exp(-\delta t)dt - \sum_{k=1}^{N(t)} \exp(-\delta T_k)Y_k\ , \quad t \geq 0, \quad \text{gdzie:}$$

- $u \geq 0$ - to nadwyżka początkowa
- c - to intensywność napływu składki na jednostkę czasu
- $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ - to wartości kolejnych szkód
- $\left(N(t) = n\right) \Leftrightarrow \left(T_n \leq t < T_{n+1}\right), \quad n = 0,1,2,3,..., \quad$ gdzie:
  - $T_0 = 0$, zaś $T_1, T_2, T_3, ...$ to momenty zajścia kolejnych szkód.

O wartościach szkód i momentach ich zajścia przyjmujemy założenia:
- $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są dodatnie i mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), (T_4 - T_3), ...$ są dodatnie i mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1/5
- $Y_1, T_1, Y_2, (T_2 - T_1), Y_3, (T_3 - T_2), Y_4, (T_4 - T_3), ...$ są niezależne.

Zakładamy ponadto, że $c = 5\frac{3}{4}$ oraz że $\delta = 1/20$.

Jeśli rozkład zmiennej losowej $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\delta T_k)Y_k$ przybliżymy rozkładem normalnym, to wartość $u_{0.95}$ kapitału początkowego u taka, przy której zachodzi:
- $\Pr\left(U(\infty) > 0\right) = 95\%$

z dokładnością tego przybliżenia wyniesie:

(A) $u_{0.95} \approx 1.15$

(B) $u_{0.95} \approx 1.25$

(C) $u_{0.95} \approx 1.35$

(D) $u_{0.95} \approx 1.45$

(E) $u_{0.95} \approx 1.55$

Uwaga: Zmienna normalna standaryzowana przekracza z prawdopodobieństwem 5% *wartość* 1,645

Zadanie 8.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$$U(t) = u + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0, \quad \text{gdzie:}$$

- $u \geq 0$ - to nadwyżka początkowa
- c - to intensywność napływu składki na jednostkę czasu
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ - to wartości kolejnych szkód
- $\left(N(t) = n\right) \Leftrightarrow \left(T_n \leq t < T_{n+1}\right), \quad n = 0,1,2,3,\ldots,$ gdzie:
  - $T_0 = 0$, zaś $T_1, T_2, T_3, \ldots$ to momenty zajścia kolejnych szkód.

O wartościach szkód i momentach ich zajścia przyjmujemy założenia:

- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są dodatnie i mają ten sam rozkład,
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), (T_4 - T_3), \ldots$ są dodatnie i mają ten sam rozkład,
- $Y_1, T_1, Y_2, (T_2 - T_1), Y_3, (T_3 - T_2), Y_4, (T_4 - T_3), \ldots$ są niezależne.

Zakładamy także, iż istnieje współczynnik dopasowania *R*, a więc taka liczba dodatnia *r*, która spełnia równanie: $\mathrm{E}\left[\exp(-rU_{n+1} | U_n)\right] = \exp(-rU_n)$.

Rozważamy dwa warianty procesu:

- Wariant 1, gdzie T_1 ma rozkład Gamma$(1, \lambda)$ zaś Y_1 rozkład Gamma$(1, \beta)$;
- Wariant 2, gdzie T_1 ma rozkład Gamma$(\frac{1}{2}, \lambda)$ zaś Y_1 rozkład Gamma$(\frac{1}{2}, \beta)$

Niech R_1 i $\Psi_1(u)$ oraz R_2 i $\Psi_2(u)$ oznaczają współczynnik dopasowania i funkcję prawdopodobieństwa ruiny dla wariantu 1 oraz wariantu 2, odpowiednio. Spośród poniższych zdań wybierz zdanie prawdziwe:

(A) $R_1 < R_2$ oraz $\underset{u \geq 0}{\forall}\left(\Psi_1(u) > \Psi_2(u)\right)$

(B) $R_1 > R_2$ oraz $\underset{u \geq 0}{\forall}\left(\Psi_1(u) < \Psi_2(u)\right)$

(C) $R_1 = R_2$ oraz $\underset{u \geq 0}{\forall}\left(\Psi_1(u) > \Psi_2(u)\right)$

(D) $R_1 = R_2$ oraz $\underset{u \geq 0}{\forall}\left(\Psi_1(u) < \Psi_2(u)\right)$

(E) $R_1 = R_2$ oraz $\underset{u \geq 0}{\exists}\left(\Psi_1(u) = \Psi_2(u)\right)$

Zadanie 9.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$
gdzie:
- u – to nadwyżka początkowa,
- $S(t)$ - to łączna wartość szkód, będąca złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ, z wykładniczymi szkodami o wartości oczekiwanej $1/\beta$
- Parametr intensywności składki wynosi $c = \dfrac{6\lambda}{5\beta}$

Wiemy, że przy aktualnej wysokości kapitału początkowego u spełniony jest warunek:
- $\Psi(u) = 1/10$.

Udziałowcy postanowili zwiększyć nadwyżkę początkową dwukrotnie. Po tej zmianie prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(2u)$ wyniesie:

(A) 0.010

(B) 0.012

(C) 0.0144

(D) $\dfrac{1}{144}$

(E) za mało danych do udzielenia odpowiedzi liczbowej

Zadanie 10.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.

Wypłata odszkodowania za n-tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$. Załóżmy, iż zmienne losowe: T_1, $(T_2 - T_1)$, $(T_3 - T_2)$, $\dots$

oraz: D_1, D_2, D_3, $\dots$

są wszystkie nawzajem niezależne i mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.

Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego n wypłata odszkodowania za szkodę $n+1$-szą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę n-tą wynosi:

(A) 0

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{3}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 4 kwietnia 2011 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z O D O W I E D Z I..............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	B	
4	C	
5	A	
6	D	
7	D	
8	D	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.