

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LVI Egzamin dla Aktuariuszy z 4 kwietnia 2011 r.**

**Część I**

**Matematyka finansowa**

**WERSJA TESTU A**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.....

Czas egzaminu: 100 minut

**1. Rozważamy dwie renty o następujących charakterystykach:**Renta 1

- N – letnia renta pewna o płatnościach dokonywanych na końcu każdego roku,
- wysokość raty płatnej na końcu roku  $k$  wynosi:  
$$r_k = 1500 \quad \text{dla } k = 1$$
$$r_k = r_{k-1} + 2 * k - N \quad \text{dla pozostałych } k$$
- rata o najmniejszej wysokości jest płatna tylko raz,
- różnica pomiędzy wysokością ostatniej raty i najmniejszej raty wynosi 196.

Renta 2

- N – letnia renta pewna o płatnościach dokonywanych na końcu każdego roku,
- wysokość raty płatnej na końcu roku  $k$  wynosi:

$$t_k = (1/k) * r_k \quad \text{dla } k \text{ podzielnych przez } 5$$

$$t_k = r_k \quad \text{dla pozostałych } k$$

Oblicz różnicę pomiędzy obecnymi wartościami Renty 1 i Renty 2, zakładając, że stopa procentowa wynosi 5%. Podaj najbliższą wartość.

- A) 3 183
- B) 3 233
- C) 3 283
- D) 3 333
- E) 3 383

2. W roku  $k = 1, 2, 3, \dots$ , jedna renta wieczysta (*perpetuity*) wypłaca ratę w wysokości  $\frac{(k-1)^2 + 1}{2^{k-1} * (k-1)!}$  na początku roku, natomiast druga renta wieczysta wypłaca ratę na końcu roku w wysokości  $k * (k + 2)$ .

Ile wynosi suma obecnych wartości tych rent, jeżeli stopa procentowa jest równa 4.5%.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 24 483
- B) 24 486
- C) 24 489
- D) 24 492
- E) 24 495

3. Kredyt o wartości 1 000 000 zostanie wypłacony w formie 20 - letniej renty pewnej wypłacającej tę samą kwotę na koniec każdego roku.

Spłata kredytu odbywa się w ten sposób, że każda rata kredytu spłacana jest również za pomocą 20 – letniej renty pewnej o jednakowych płatnościach na końcu każdego roku, przy czym pierwsza rata spłaty zostaje wpłacona rok po otrzymaniu danej raty kredytu.

Wiedząc, że stopa procentowa wynosi 7%, oblicz ile wynosi stosunek sumy odsetek zapłaconych przez kredytobiorcę na końcu 9 roku - licząc od dnia otrzymania ostatniej raty kredytu - do sumy spłat kapitału zapłaconych w tym terminie.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 0.47
- B) 0.49
- C) 0.51
- D) 0.53
- E) 0.55

4. Inwestor ulokował kapitał w kwocie 500 000 na bankowym koncie inwestycyjnym oprocentowanym na poziomie 5% rocznie, na okres 10 lat.

Na końcu każdego roku inwestor wypłacał z konta wszystkie należne odsetki i natychmiast je reinwestował w 3 funduszach inwestycyjnych F1, F2 i F3, których stopy zwrotu wynosiły odpowiednio 5.5%, 6%, 7%.

Informacja, jaką przedstawił inwestor, dotycząca alokacji środków do poszczególnych funduszy na końcu roku  $k$  jest następująca:

- F1 – 40% środków,
- F2 –  $(11-k)/11$  pozostałych środków.

Po upływie 10 lat inwestor wycofał wszystkie należne mu środki i zakończył inwestycję.

Oblicz, jaka była efektywna roczna stopa zwrotu z zainwestowanego kapitału.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 5.2%
- B) 5.3%
- C) 5.4%
- D) 5.5%
- E) 5.6%

5. Rozważmy dwuletnią obligację korporacyjną o następujących parametrach:

- Nominał  $N = 1000$  płatny jest po dwóch latach od momentu emisji;
- Kupony  $K_i, i = 1, 2$  są zmienne i płatne w rocznicę emisji. Zależą one od stopy wolnej od ryzyka w następujący sposób  $K_i = RFR_i + 4\%$ , gdzie  $RFR_i$  oznacza stopę wolną od ryzyka w roku  $i$ ;
- W momencie emisji krzywa wolnych od ryzyka stóp forward jest następująca:  
 $RFR_1 = 3\%, RFR_2 = 4\%$ ;
- Prawdopodobieństwo niewypłacalności emitenta w każdym roku wynosi 0.05.  
W przypadku upadłości emitenta nie jest możliwe odzyskanie należnych płatności z obligacji.

Jakiego stałego narzutu na stopy wolne od ryzyka (używane do dyskontowania płatności z opisanej obligacji) należy użyć zamiast uwzględnienia prawdopodobieństwa niewypłacalności, aby uzyskać prawidłową wycenę tej obligacji w momencie emisji?

Podać najbliższą odpowiedź.

- A) 6.0%
- B) 5.4%
- C) 4.5%
- D) 2.0%
- E) 0.0%

6. Pięcioletnia obligacja o nominale 1 000 PLN i stałym rocznym kuponie, w trzecią rocznicę emisji wyceniana jest na 1 009.30 PLN (wycena po płatności trzeciego kuponu). Roczna stopa wola od ryzyka jest stała i wynosi w rozważanym momencie 5%. Wiadomo ponadto, że w trzecią rocznicę emisji dla tej obligacji:

*Modified Duration* = 1.855 i *Convexity* = 5.254.

Ile wynosiłaby cena tej obligacji w trzecią rocznicę emisji przy natychmiastowym spadku stopy wolnej od ryzyka do 4.5%? Podać najbliższą odpowiedź.

- A) 992.15 PLN
- B) 1 018.59 PLN
- C) 1 018.66 PLN
- D) 1 018.73 PLN
- E) 1 028.29 PLN

7. Rozpatrzmy rynek, na którym możliwe są tylko dwa przyszłe stany: I lub II. Na tym rynku dostępne są aktywa A i B oraz dwa aktywa jednostkowe. Funkcje wypłaty opisanych aktywów, w zależności od stanu, w którym znajduje się rynek podaje tabela:

Wypłata	Aktywo A	Aktywo B	Aktywo jednostkowe stanu I	Aktywo jednostkowe stanu II
Stan I	5.00	3.00	1.00	0.00
Stan II	1.00	2.00	0.00	1.00

Wiadomo ponadto, że w chwili obecnej cena aktywów A i B jest taka sama i wynosi 2.10. Ile wynosi na tym rynku stopa wolna od ryzyka? Zakładamy, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Podać najbliższą odpowiedź.

- A)  $\frac{1}{2}$
- B)  $\frac{1}{3}$
- C)  $\frac{1}{5}$
- D)  $\frac{1}{7}$
- E)  $\frac{1}{9}$



8. Dany jest dyskretny proces  $X_t, t = 0, \dots, 3$  opisujący zachowanie rocznej stopy zmiennej procentowej. Wiadomo, że stopa startuje z wartości początkowej  $X_0 = 4.83\%$  i rośnie o 85% lub maleje o 63% w stosunku do wartości z poprzedniego okresu z prawdopodobieństwami 0.83 i 0.17 odpowiednio.

Dany jest również instrument bazowy, którego cenę opisuje dyskretny proces:

$$S_t = 88 \cdot e^{(7X_t - 1)}, t = 0, \dots, 3.$$

Na instrument bazowy  $S_t$  wystawiono europejską barierową opcję kupna typu

*knock-in-and-up* (\*) (opcja z barierą „wejścia w górę”) o cenie wykonania  $K = 45$  i barierze  $H = 50$ .

Wyznacz obecną cenę opcji barierowej zakładając roczną stopę wolną od ryzyka 5%.

Przy sprawdzaniu aktywności opcji zachowaj dokładność do setnych części ceny:

- A) 69.91
- B) 80.93
- C) 113.78
- D) 115.20
- E) 131.71

**Wskazówka:**

*(\*) Opcja z barierą „wejścia” (knock-in option) nabiera wartości w momencie osiągnięcia przez cenę instrumentu bazowego ustalonej bariery.*

*Opcja z barierą „wejścia w górę” (knock-in-and-up) nabiera wartości w momencie, gdy cena instrumentu bazowego znajdzie się powyżej poziomu bariery.*

9. Zakład ubezpieczeń na życie wyznacza kapitałowy wymóg wypłacalności na ryzyko stopy procentowej ( $SCR_{INT}$ ) w oparciu o zmianę wartości aktywów netto pod wpływem wahań stopy procentowej, wykorzystując wzór:

$$SCR_{INT} = \max(\Delta NAV_{UP}, \Delta NAV_{DOWN}, 0)$$

gdzie:

$\Delta NAV_{UP}$  - zmiana Aktywów Netto pod wpływem wzrostu stopy procentowej,

$\Delta NAV_{DOWN}$  - zmiana Aktywów Netto pod wpływem spadku stopy procentowej.

Aktywa Netto są wyznaczone, jako nadwyżka aktywów ponad zobowiązania ubezpieczeniowe.

Przyjęto następującą konwencję wyznaczania zmiany Aktywów Netto: dodatnia wartość oznacza stratę (gdzie strata oznacza spadek wartości Aktywów Netto).

**Portfel aktywów** zakładu ubezpieczeń składa się z trzech pakietów obligacji wygasających odpowiednio po 3, 6 i 12 latach. Każdy z pakietów ma łączny nominal równy 100 mln PLN i płaci łącznie roczny kupon 10% na koniec każdego roku.

**Portfel zobowiązań ubezpieczeniowych** zakładu posiada wbudowane opcje i gwarancje, w wyniku, czego nominalne przepływy pieniężne zobowiązań zależą od wahań stopy procentowej. Znane są następujące charakterystyki portfela zobowiązań:

- wartość obecna: 300 mln PLN
- efektywny czas trwania (*effective duration*): 4.5
- efektywna wypukłość (*effective convexity*): 2.3

Stopa procentowa jest założona na stałym poziomie 5%.

Wahania stopy procentowej w górę/dół są założone +/- 3 p.p.

Kapitałowy wymóg wypłacalności na ryzyko stopy procentowej wynosi:

- A) 0
- B) 13.65
- C) 28.36
- D) 83.31
- E) 111.67

(\*) Zgodnie z nowymi wymogami Solwency II kapitał wypłacalności powinien odzwierciedlać profil ryzyka zakładu ubezpieczeń. Jest on wyznaczany na pokrycie poszczególnych ryzyk, a następnie agregowany na poziomie całego portfela. Agregacja następuje przy użyciu macierzy korelacji pomiędzy poszczególnymi modułami ryzyk.

**10.** Inwestor zakupił 10 letnią obligację o nominale 100 PLN, kuponie 9% w skali roku płaconym na koniec każdego półrocza. Obligacja ma wbudowaną opcję przedłużenia (extendable bond) o kilku terminach wykupu w okresie przedłużenia (multiple dated bond). Oznacza to, że emitent może zdecydować o przedłużeniu czasu trwania obligacji o 6 lat, przy utrzymaniu początkowych założeń odnośnie wypłacanego kuponu. Ponadto ma on prawo wyboru momentu zapadalności (wykupu) obligacji w okresie przedłużenia. Możliwe zapadalności mogą przypadać w momentach wypłaty kuponu, przy czym nie jest możliwy wykup obligacji przed upływem pierwotnego 10-letniego okresu trwania. Wartość wykupu zależy od roku, w którym nastąpi wykup obligacji:

Rok obligacji	10	11	12	13	14	15	16
Wartość wykupu (PLN)	100.0	115.3	115.3	97.5	97.5	135.0	135.0

Jaką najmniejszą cenę powinien zapłacić inwestor w momencie zakupu, jeśli chce on osiągnąć stopę dochodowości obligacji na poziomie 8% w skali roku (przy kapitalizacji zgodnej z częstotliwością wypłaty kuponu)?

- A) 98.74
- B) 98.19
- C) 102.69
- D) 106.80
- E) 106.87

**Uwaga:**

*Kupony wypłacane są na koniec każdego półrocza, zatem w  $n$ -tym roku obligacji wypłacany jest kupon  $(2n-1)$ -ty oraz  $2n$ -ty.*

**Egzamin dla Aktuariuszy z 4 kwietnia 2011 r.****Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko: .....

Pesel: .....

OZNACZENIE WERSJI TESTU .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	B	
3	C	
4	A	
5	B	
6	D	
7	E	
8	C	
9	B	
10	D	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.