Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXII Egzamin dla Aktuariuszy z 10 grudnia 2012 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Kredyt o wartości 200 000 będzie spłacany równymi ratami płatnymi na koniec każdego miesiąca, przez okres 15 lat. Nominalna roczna stopa kredytu wynosi $i^{(2)} = 10\%$, przy półrocznej kapitalizacji odsetek.
Niech N oznacza numer raty, w której pierwszy raz spłata kapitału będzie co najmniej dwa razy większa od spłaty odsetek, a M numer raty, w której pierwszy raz spłata kapitału będzie co najmniej trzykrotnie większa od spłaty odsetek. Podać różnicę $M - N$.

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17

2. Rozważmy dwa kredyty, każdy w wysokości 150 000, które są spłacane przy użyciu stałej wielkości wpłat dokonywanych do funduszu umorzeniowego (*ang. sinking fund*) oraz odsetek płatnych na bieżąco. Wpłaty do funduszu umorzeniowego oraz płatności odsetek dokonywane są na koniec roku. Oprocentowanie kredytów wynosi 11% w skali roku.
W przypadku pierwszego kredytu spłata następuje w okresie 4 lat, a wysokość odsetek netto uzyskanych w okresie spłaty wynosi 45 282.48, w drugim przypadku spłata trwa 12 lat a wysokość odsetek netto wynosi 132 173.97. Odsetki netto to różnica pomiędzy odsetkami zapłaconymi a odsetkami zakumulowanymi w funduszu.
Wiedząc, że w obu przypadkach stopa zwrotu funduszu umorzeniowego jest taka sama, oblicz jej wartość. Podać najbliższą wartość:

A) 8.5%
B) 9.0%
C) 9.5%
D) 10.0%
E) 10.5%

3. Kredyt oprocentowany na poziomie 9% w skali roku spłacany jest przez okres 25 lat ratami płatnymi na końcu kolejnych lat w sposób następujący:

- pierwszych 12 rat charakteryzuje się tym, że każda rata jest o 5% większa od poprzedniej,
- na końcu 13 roku wpłacana jest kwota 50 000,
- w okresie ostatnich 12 lat każda rata – z wyjątkiem pierwszej w tej grupie – jest mniejsza od poprzedniej o 2 000.

Wiadomo ponadto, że:

- nominalny koszt tego kredytu przy powyższym schemacie płatności wynosi 370 659.10
- gdyby kredyt spłacać równymi ratami, przy czym wartość każdej raty byłaby równa sumie raty 1 i raty 14 z powyższego schematu spłat, płatnymi na końcu każdego roku przez okres 8 lat, to do całkowitego spłacenia kredytu niezbędna byłaby jeszcze dodatkowa płatność w kwocie 44 392.74 dokonana na końcu 9 roku.

Oblicz wartość powyższego kredytu. Podać najbliższą wartość.

A) 325 000
B) 335 000
C) 345 000
D) 355 000
E) 365 000

4. Rozważmy następujący ciąg płatności, rozpoczynający się w styczniu, przez okres 10 kolejnych lat:

- w okresie pierwszych 5 lat, płatności o wartości 1 dokonywane są co miesiąc,
- w ciągu następnych 3 lat, płatności o wartości 3 dokonywane są co 2 miesiące, począwszy od lutego 6 roku,
- w ostatnich 2 latach, płatności o wartości 4 dokonywane są kwartalnie,
- wszystkie płatności wykonuje się w ostatnim dniu odpowiedniego okresu.

Zakładając, że powyższy ciąg płatności jest spłatą pożyczki, której oprocentowanie w skali roku wynosi i (czynnik dyskontujący v), wskazać wzór wyrażający sumę odsetek zapłaconych na końcu 3 i 6 roku.

A) $a_{\overline{2}|}^{(12)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + \frac{3}{2} \cdot a_{\overline{2}|}^{(6)} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{2}{12}} + 3 \cdot a_{\overline{3}|}^{(6)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{26}{12}} + a_{\overline{2}|}^{(4)} \cdot \left(\frac{4}{3} i^{(12)} \cdot v^{\frac{61}{12}} + \right.$
$\left. + \frac{8}{3} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{26}{12}}\right) + \frac{1}{12} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + \frac{1}{2} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{1}{6}}$

B) $a_{\overline{2}|}^{(12)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + 3 \cdot a_{\overline{2}|}^{(6)} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + \frac{3}{2} \cdot a_{\overline{3}|}^{(6)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{26}{12}} + a_{\overline{2}|}^{(4)} \cdot \left(\frac{4}{3} i^{(12)} \cdot v^{\frac{61}{12}} + \right.$
$\left. + \frac{8}{3} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{25}{12}}\right) + \frac{1}{4} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + \frac{1}{2} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{1}{6}}$

C) $a_{\overline{2}|}^{(12)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + 3 \cdot a_{\overline{2}|}^{(6)} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{2}{12}} + \frac{3}{2} \cdot a_{\overline{3}|}^{(6)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{25}{12}} + a_{\overline{2}|}^{(4)} \cdot \left(\frac{4}{3} i^{(12)} \cdot v^{\frac{61}{12}} + \right.$
$\left. + \frac{8}{3} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{26}{12}}\right) + \frac{1}{12} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + \frac{1}{2} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{1}{6}}$

D) $a_{\overline{2}|}^{(12)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + \frac{3}{2} \cdot a_{\overline{2}|}^{(6)} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + 3 \cdot a_{\overline{3}|}^{(6)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{25}{12}} + a_{\overline{2}|}^{(4)} \cdot \left(\frac{4}{3} i^{(12)} \cdot v^{\frac{61}{12}} + \right.$
$\left. + \frac{8}{3} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{25}{12}}\right) + \frac{1}{12} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + \frac{1}{3} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{1}{6}}$

E) $a_{\overline{2}|}^{(12)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + 3 \cdot a_{\overline{2}|}^{(6)} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{2}{12}} + \frac{3}{2} \cdot a_{\overline{3}|}^{(6)} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{26}{12}} + a_{\overline{2}|}^{(4)} \cdot \left(\frac{4}{3} i^{(12)} \cdot v^{\frac{61}{12}} + \right.$
$\left. + \frac{8}{3} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{25}{12}}\right) + \frac{1}{4} \cdot i^{(12)} \cdot v^{\frac{1}{12}} + \frac{1}{2} \cdot i^{(6)} \cdot v^{\frac{1}{6}}$

5. Niech $S(t)$ oznacza proces ceny akcji S niepłacącej dywidendy, zależny od czasu t, $t \geq 0$. Przyjmując założenia rynku finansowego zgodne z modelem Blacka-Scholesa wiadomo, że w chwili $(t = 0)$:

- intensywność stopy wolnej od ryzyka r jest stała i wynosi 8% w skali roku (kapitalizacja ciągła),
- akcja S ma cenę $S(0) = 40$ PLN,
- $\sigma < 0.5$ oznacza zmienność ceny akcji S,
- uczestnik rynku, będący za razem twórcą rynku (*market maker*), który stosuje strategię *delta-hedging* wystawia w chwili $t = 0$ europejską opcję kupna na akcję S, o okresie wygaśnięcia 3 miesiące i będącą w chwili wystawienia w cenie (*at-the-money*),
- parametr *delta* dla tej opcji w chwili 0 wynosi 0.5987.

Po upływie jednego dnia uczestnik rynku ma zerowy zysk/stratę. Przyjmując konwencję 365 dni w roku, zmiana ceny akcji S w ciągu jednego dnia od chwili $t = 0$ wynosi (podać najbliższą wartość):

A) 0.42 PLN
B) 0.52 PLN
C) 0.67 PLN
D) 1.11 PLN
E) 1.67 PLN

6. W chwili 0, kwota K_0 została w całości zainwestowana w akcje pewnej spółki. Cena akcji tej spółki w chwili 0 wynosi S_0. Inwestor zakłada, że cena akcji tej spółki w chwili 1 ma rozkład logarytmiczno-normalny z $ES_1 = S_0$, $Var(S_1) = 0.04 \cdot S_0^2$. Przy tych założeniach oczekiwana wysokość straty z tej inwestycji, pod warunkiem, że nastąpi strata, wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

A) $0.15K_0$

B) $0.27K_0$

C) $0.54K_0$

D) $0.81K_0$

E) K_0

Objaśnienia:

Zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno-normalny z parametrami $\mu, \sigma > 0$, jeżeli zmienna losowa $Y = ln(X) \sim N(\mu, \sigma)$. Ponadto:

- funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej X ma postać:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x > 0,$$

- wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej X wyrażają się wzorami:

$$EX = exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}, VarX = (exp\{\sigma^2\} - 1) \cdot exp\{2\mu + \sigma^2\}.$$

7. Niech $S(t)$ będzie ceną akcji w chwili (roku) t. Akcja ta nie wypłaca dywidendy. Intensywność oprocentowania (δ) wynosi 4% w skali roku, a zmienność ceny akcji (σ) wynosi 25%. Zakładamy ponadto, że proces ceny akcji dany jest wzorem:

$$S(t) = A(t) \cdot exp\{\sigma\sqrt{t}Z\}, t > 0$$

gdzie $Z \sim N(0,1)$, a $A(t) > 0$ dla $t > 0$ jest pewną funkcją rzeczywistą oraz, że rynek nie dopuszcza arbitrażu.

Wyznaczyć cenę, w chwili 0, kontraktu, który wypłaca po roku kwotę $K = \max(S(0), S(1))$. Podać najbliższą wartość K.

A) $0.85 \cdot S(0)$
B) $0.95 \cdot S(0)$
C) $1.02 \cdot S(0)$
D) $1.08 \cdot S(0)$
E) $1.12 \cdot S(0)$

8. Inwestor w chwili $t = 0$ może zainwestować całe swoje środki w instrument finansowy I_1 lub też wpłacić je na lokatę dwuletnią. W przypadku wpłacenia środków na lokatę stopa zwrotu w pierwszym roku wynosi $r_1 = 5\%$, natomiast w drugim roku $r_2 = 2.5\%$. Inwestor nie ma możliwości wypłacenia środków z lokaty do końca inwestycji w chwili $t = 2$.

W przypadku inwestycji w instrument I_1 stopa zwrotu w okresie roku jest realizacją zmiennej losowej X_1. W chwili $t = 1$ środki są wypłacane i natychmiast reinwestowane – w instrument finansowy I_2 lub na rocznej lokacie o stopie zwrotu r_2. W przypadku inwestycji w instrument I_2 stopa zwrotu w okresie roku jest realizacją zmiennej losowej X_2.

Wektor (X_1, X_2) ma rozkład ciągły z gęstością:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 200, & \text{gdy } x_1 \in [0{,}10\%], x_2 \in [0, x_1], \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

O wysokości X_1 inwestor dowiaduje się w chwili $t = 1$ (przed chwilą reinwestycji), o wysokości X_2 w chwili $t = 2$ (moment końca inwestycji).

Inwestor stosuje strategię inwestycyjną by zmaksymalizować oczekiwaną dwuletnią stopę zwrotu. Stopa ta jest najbliższa wartości:

A) 7.6%

B) 8.3%

C) 9.0%

D) 9.7%

E) 10.4%

9. Rozpatrujemy instrument finansowy wypłacający w chwili $t = 3$ kwotę $S_M - S_m$, gdzie S_i jest ceną akcji w chwili $t = i$, $i = 0, 1, 2, 3$, natomiast $S_M = max(S_0, S_1, S_2, S_3)$ i $S_m = min(S_0, S_1, S_2, S_3)$. Inwestor wycenia instrument na drzewie dwumianowym przy następujących założeniach:

- $S_0 = 100$,
- w ciągu roku cena akcji rośnie o 25% lub spada o 20%,
- roczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 10\%$,
- rynek nie dopuszcza arbitrażu.

Jaką cenę instrumentu otrzyma inwestor wykorzystując opisaną metodę (podać najbliższą odpowiedź)?

A) 38.3
B) 40.3
C) 42.3
D) 44.3
E) 46.3

10. Firma A posiada trzyletnią obligację zerokuponową firmy B o nominale 1 000 PLN. Prawdopodobieństwo bankructwa firmy B w okresie $(i-1, i]$ dla $i = 1,2,3$ wynosi $p_i = i \cdot 5\%$. Czynnik dyskontujący v w każdym z powyższych okresów równy jest 0.95. W przypadku niewypłacalności firmy B firma A w momencie zapadalności obligacji odzyska 20% nominału.

Firma A, chcąc się zabezpieczyć przed stratami związanymi z niewypłacalnością firmy B może:

I. Zakupić w chwili $i = 0$ od banku instrument CDS (*credit default swap*) na następujących zasadach:

- w przypadku braku niewypłacalności firmy B w okresie $(i-1, i]$ dla $i = 1,2,3$ w momencie i firma A płaci bankowi stałą składkę w wysokości $K\%$ nominału obligacji,
- w przypadku niewypłacalności firmy B w dowolnej chwili okresu [0,3] bank w momencie $i = 3$ przejmuje od firmy A obligację wypłacając równocześnie nominał. Od momentu niewypłacalności firmy B firma A przestaje płacić składkę,
- bank nie pobiera od transakcji żadnej marży.

II. Zakupić w chwili $i = 0$ pewną ilość trzyletnich europejskich opcji sprzedaży na akcje firmy B. Cena jednej opcji o cenie wykonania 10 PLN wynosi 2.584 PLN. Zakładamy, że w przypadku bankructwa firmy B cena akcji spada do 0 PLN.

O jaki procent mogłaby być wyższa składka (tj. jaką maksymalną marżę mógłby pobierać bank) aby koszt strategii I. był dla firmy A równy kosztowi strategii II.? Podać najbliższą odpowiedź.

A) 5.3%
B) 10.3%
C) 15.3%
D) 20.3%
E) 25.3%

Egzamin dla Aktuariuszy z 10 grudnia 2012 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	A	
4	C	
5	A	
6	A	
7	D	
8	E	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.