

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LVII Egzamin dla Aktuariuszy z 20 czerwca 2011 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Firma sektora energetycznego planuje zakup 2 mln baryłek ropy w grudniu 2011. Firma, obawiając się znacznego wzrostu ceny baryłki ropy, kupuje kontrakt terminowy *futures* na olej opałowy. Analiza danych historycznych pokazała dużą pozytywną korelację cen ropy i oleju opałowego.

Obecne ceny gotówkowe (*spot price*) baryłki ropy i oleju opałowego wynoszą 170 PLN i 162.5 PLN odpowiednio. Cena terminowa (*futures price*) z dostawą w grudniu baryłki oleju opałowego wynosi 167.5 PLN. Każdy kontrakt terminowy na olej opałowy opiewa na 42 000 baryłek.

Oznaczmy:

X – zmiana ceny terminowej baryłki oleju opałowego w okresie do grudnia (w PLN)

Y – zmiana ceny gotówkowej baryłki ropy w okresie do grudnia (w PLN)

W momencie zawarcia kontraktu ceny terminowe oraz ceny gotówkowe są równe swoim wartościom oczekiwany w przyszłości, tj. w chwili obecnej $E[X] = 0$ oraz $E[Y] = 0$.

Kontrakt terminowy na olej opałowy jest rozliczany gotówkowo, tzn. nie następuje fizyczna dostawa instrumentu bazowego. Pozycja może zostać zamknięta przed upływem kontraktu poprzez przyjęcie pozycji przeciwnej. Pozycja w kontrakcie terminowym jest rozliczana w systemie *mark to market* czyli następuje codzienne rozliczanie otwartych pozycji według dziennego kursu rozliczenia tj. ceny terminowej z ostatniej transakcji przed zamknięciem.

Wiadomo, że w okresie do grudnia:

- zmienność (odchylenie standardowe) procentowego wzrostu ceny *futures*, z rozliczeniem w grudniu, oleju opałowego wynosi 23%,
- zmienność (odchylenie standardowe) procentowego wzrostu ceny spot ropy wynosi 31%,
- korelacja między tymi dwoma stopami wzrostu wynosi 0.89.

Jaką liczbę kontraktów *futures* na olej opałowy powinna nabyć rozważana firma, aby zminimalizować odchylenie standardowe swojej ekspozycji na rynku energetycznym?

- A) 19
- B) 48
- C) 51
- D) 58
- E) 72

2. Zakład ubezpieczeń rozpatruje inwestycje w dwa portfele, o których znane są następujące charakterystyki:

Portfel	Premia za ryzyko	Współczynnik Beta
I	3.1%	0.85
II	3.8%	0.68

Do oceny stopy zwrotu inwestor stosuje model CAPM (*Capital Asset Pricing Model*).

Dostępne są następujące informacje:

- stopa wolna od ryzyka mierzona dochodowością długoterminowych obligacji rządowych wynosi 5.5%,
- premia za ryzyko jest określona w tabelce powyżej,
- współczynniki beta są określone w tabelce powyżej,
- ponadto dla portfela I istnieje dodatkowa premia za ryzyko 0.3% (narzut na ryzyko związany ze strukturą portfela),
- dla portfela II nie zidentyfikowano dodatkowych czynników ryzyka.

Wybierz poprawną odpowiedź:

- A) informacje do których ma dostęp zakład ubezpieczeń nie wystarczają aby oszacować oczekiwaną stopę zwrotu w oparciu o model CAPM,
- B) inwestycje w oba portfele przyniosą takie same stopy zwrotu, niezależnie od tego czy zostanie uwzględniona dodatkowa premia za ryzyko dla portfela I,
- C) inwestycja w portfel II przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel I niezależnie od tego czy zostanie uwzględniona dodatkowa premia za ryzyko dla portfela I,
- D) tylko przy uwzględnieniu dodatkowej premii za ryzyko dla portfela I inwestycja w portfel II przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel I,
- E) inwestycja w portfel I przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel II niezależnie od tego czy zostanie uwzględniona dodatkowa premia za ryzyko dla portfela I.

3. Bank X emituje obligację o nominale 150 000 PLN, okresie do wygaśnięcia 4 lata i kuponie 6.5% płatnym na koniec roku.

Na koniec każdego roku (łącznie z momentem zapadalności) odbywa się ocena wypłacalności dająca jeden z dwóch możliwych wyników: zachowanie lub utrata wypłacalności. Jeśli zostanie stwierdzona utrata wypłacalności kupon należny za dany rok nie zostanie wypłacony, nastąpi w tym momencie wygaśnięcie obligacji i zwrot 30% jej nominału.

W oparciu o *rating* kredytowy banku X określone zostały prawdopodobieństwa niewypłacalności w każdym roku trwania obligacji. Prawdopodobieństwo utraty wypłacalności na koniec pierwszego roku wynosi 10%, w kolejnych latach wypłacalność determinują następujące prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P(X_2^d | X_1^s) = 15\% \quad P(X_3^d | X_2^s) = 25\% \quad P(X_4^d | X_3^s) = 32\%$$

gdzie $P(X_i^d | X_{i-1}^s)$ oznacza prawdopodobieństwo utraty wypłacalności na koniec roku i pod warunkiem, że na koniec roku $i-1$ stwierdzono utrzymanie wypłacalności.

Obecna wartość godziwa obligacji przy stałej rocznej stopie procentowej 5.5% (kapitalizacja dyskretna) wynosi (podaj najbliższą wartość):

- A) 48 970 PLN
- B) 93 816 PLN
- C) 111 598 PLN
- D) 160 083 PLN
- E) 297 863 PLN

4. Niech $S(t)$ będzie ceną spot akcji w chwili (roku) t . Akcja ta nie wypłaca dywidendy w najbliższym roku. Wyznaczyć cenę w chwili 0 kontraktu, który po roku daje posiadaczowi wypłatę $S(1)^2/S(0)^2$. Intensywność oprocentowania wynosi 5% w skali roku, a zmienność σ ceny akcji wynosi 30%. Zakładamy ponadto, że cena akcji opisana jest przez proces:

$$S(t) = A(t) \cdot \exp(\sigma\sqrt{t}Z), \quad t > 0,$$

gdzie, $Z \sim N(0,1)$, a $A(t) > 0$ jest pewną funkcją rzeczywistą oraz, że rynek nie dopuszcza arbitrażu.

- A) $S^2(0) \cdot \exp(0.14)$
- B) $\exp(0.14)$
- C) $S^2(0) \cdot \exp(0.095)$
- D) $\exp(0.095)$
- E) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5. Do wyceny obligacji korporacyjnych wykorzystywany jest model oparty o rating kredytowy emitenta i posiadający następujące założenia:

- Możliwe są dwa ratingi kredytowe A lub B.
- Macierz prawdopodobieństw przejścia pomiędzy ratingami w jednym kroku ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

- Krok modelu jest roczny.
- Jeśli na początku roku k emitent obligacji posiada rating kredytowy A, to do dyskontowania przepływów pieniężnych z wyemitowanej przez niego obligacji występujących w tym roku używamy czynnika dyskontującego $v_A = 0.9$. Jeżeli zaś emitent posiada rating kredytowy B, to analogiczny czynnik dyskontujący v_B wynosi 0.80.

Rozważmy obligację korporacyjną wyemitowaną na początku pierwszego roku przez spółkę o ratingu kredytowym A. Jest to trzyletnia obligacja o nominale 1 000, z kuponem w wysokości 5% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku.

Cena tej obligacji w momencie emisji wyznaczona przy użyciu opisanego modelu wynosi w przybliżeniu:

- A) 336.78
- B) 550.07
- C) 707.23
- D) 785.81
- E) 873.13

6. Cena rynkowa P pewnego instrumentu finansowego spełnia równanie różniczkowe:

$$\frac{dP}{di} = v^3 \left(-\frac{5}{v} - 210 \right),$$

gdzie v jest czynnikiem dyskontującym dla stopy $i = \text{YTM}$. Wyznacz wartość P tego instrumentu dla $i = \text{YTM} = 3.5\%$, jeżeli dla $i = \text{YTM} = 3\%$ wynosi ona 103.83. Podaj najbliższą wartość.

- A) 104.82
- B) 103.33
- C) 103.01
- D) 102.85
- E) 101.89

7. Portfel funduszu inwestycyjnego składa się z dwóch rodzajów obligacji A i B, które zakupiono w momencie ich emisji na początku roku. Charakterystyka obligacji, przy założeniu, że stopa procentowa wynosi 6%, jest następująca:

obligacja A

- płaci kupony o wartości 5% wartości nominalnej na końcu każdego roku, a wartość wykupu równa jest wartości nominalnej,
- cena obligacji w momencie zakupu wynosi 91.61% wartości nominalnej,
- duration obligacji w momencie zakupu wynosi $d_A = 9.168$

obligacja B

- płaci kupony o wartości 7% wartości nominalnej na końcu każdego roku, a wartość wykupu równa jest wartości nominalnej,
- cena obligacji w momencie zakupu wynosi 107.36% wartości nominalnej,
- duration obligacji w momencie zakupu wynosi $d_B = 7.611$

Wiedząc, że duration całego portfela, przy stopie procentowej 6%, na początku następnego roku, tzn. już po wypłacie pierwszych kuponów obu obligacji wynosi 7.579, oblicz stosunek sumarycznej wartości nominalnej obligacji A do sumarycznej wartości nominalnej obligacji B zawartych w portfelu funduszu inwestycyjnego.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 0.4
- B) 0.5
- C) 0.6
- D) 0.7
- E) 0.8

8. Kredytobiorca spłacił kredyt o wartości 400 000 w poniżej opisany sposób, dokonując wszystkich płatności na końcu miesiąca.
1. W okresie pierwszego półrocza po otrzymaniu kredytu spłacane były tylko odsetki od bieżącego zadłużenia, natomiast w drugim półroczu kredytobiorca nie spłacał w ogóle kredytu ze względu na chwilowe trudności finansowe.
 2. Po upływie roku ustalono, że kredyt zostanie spłacony równymi 360 ratami, jednakże po zapłaceniu 120 rat zmieniony został harmonogram dalszych spłat.
 3. W ciągu następnych 60 miesięcy kredyt był spłacany ratami rosnącymi o stałą wielkość – dotyczyło to również pierwszej z tych rat, natomiast w kolejnych 60 miesiącach spłaty odbywały się ratami malejącymi o 1% miesięcznie, co również dotyczyło pierwszej raty w tej grupie.

Wiedząc, że nominalna roczna stopa oprocentowania wynosi 6.5% a prowizja, jaką pobrał bank za udzielenie kredytu stanowi 1.5% jego wartości, oblicz łączną nominalną sumę kosztów tego kredytu.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 409 000
- B) 411 000
- C) 413 000
- D) 415 000
- E) 417 000

9. Kredyt jest spłacany w 30 ratach płatnych na końcu kolejnych lat, przy stopie oprocentowania równej 5%.

Raty mają postać następującą:

$$R, R + X, R + 2X, \dots, R + 18X, R + 19X, R + 18X, R + 17X, \dots, R + 9X$$

Wiadomo, że stosunek R/X wynosi 16.7. Oblicz, jaki udział w 15 racie stanowią odsetki.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 47%
- B) 50%
- C) 53%
- D) 56%
- E) 59%

10. Renta wieczysta wypłaca raty na początku każdego nieparzystego roku. Wielkość raty wypłacanej na początku roku $2n + 1$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$, wynosi:

$$\frac{1}{(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot 3^n}.$$

Oblicz skapitalizowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, jeżeli stopa oprocentowania wynosi 4.5%.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 0.40
- B) 0.44
- C) 0.48
- D) 0.52
- E) 0.56

Egzamin dla Aktuariuszy z 20 czerwca 2011 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko:

Pesel:

OZNACZENIE WERSJI TESTU

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	E	
3	B	
4	B	
5	D	
6	D	
7	C	
8	B	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.