Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LIX Egzamin dla Aktuariuszy z 12 marca 2012 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Dane są dwa fundusze Φ i Ψ, takie, że zakumulowana wartość wpłaconej w chwili 0 kwoty 1 wynosi:

- $1 + 2t,\ t > 0$, w przypadku funduszu Φ,
- $1 + \frac{1}{2}t^2,\ t > 0$, w przypadku funduszu Ψ.

Wartość $T > 0$, dla której intensywność oprocentowania funduszu Φ jest równa intensywności oprocentowania funduszu Ψ, wynosi:

A) $\frac{1}{2}$

B) 1

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{4}{3}$

E) 2

2. Zakład ubezpieczeń nabył 10-letnią obligację zerokuponową o nominale 1000 PLN za cenę $1000/1.05^{10}$. Obligacja ta posiada opcję wcześniejszego wykupu emitenta za 5 lat od emisji po cenie $1000/1.04^{5}$. Opcja ta jest wykonywana przez emitenta zawsze, gdy jest to dla niego korzystne. Wiadomo, że 5-cio letnia stopa zerokuponowa za 5 lat ma rozkład jednostajny na przedziale $[3\%, 7\%]$. Jeśli nastąpi wcześniejszy wykup, to otrzymane przez zakład ubezpieczeń środki zostaną w całości reinwestowane w 5 letnie obligacje zerokuponowe. Ile wynosi roczna efektywna stopa zwrotu dla tej inwestycji? Obliczenia należy wykonać dla oczekiwanego zwrotu z inwestycji. Podać najbliższą odpowiedź.

A) 4.88%
B) 4.94%
C) 5.00%
D) 5.07%
E) 5.13%

3. Rozważmy nieskończony ciąg rent nieskończonych. Renta wieczysta a_N startująca w roku N ≥ 1 płaci $k \cdot v^k$ na koniec każdego roku $k \geq$ N. Roczna stopa dyskontowa $i = 10\%$ ($v = {}^1/_{(1+i)}$). Niech α_N oznacza wartość obecną wypłat renty a_N wyznaczoną na początek roku 1. Suma takich wartości obecnych wypłat ze wszystkich rent a_N, czyli $\sum_1^{+\infty} \alpha_N$, wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

A) 908.19

B) 2 210.27

C) 2 310.00

D) 24 310.00

E) $+\infty$

4. Inwestor zaciągnął pożyczkę, którą musi spłacić w kwocie PLN 10 000 za 5 lat od chwili obecnej. Inwestor nie jest obciążony żadnymi odsetkami wynikającymi z tej pożyczki i jest ona jego jedynym zobowiązaniem. Aby zabezpieczyć spłatę zobowiązania inwestor postanawia nabyć w chwili obecnej 2-letnią zero-kuponową obligację rządową za kwotę X oraz 10-letnią zero-kuponową obligację rządową za kwotę Y. Strategia zabezpieczająca polega na dopasowaniu obecnej wartości zobowiązań do obecnej wartości portfela obligacji oraz zapewnieniu, że zmiana wartości obecnej zobowiązań pod wpływem niewielkich wahań stopy dochodowości jest taka sama jak zmiana wartości portfela obligacji pod wpływem wahań tej stopy.

Ponadto wiadomo, że w otoczeniu $(i_0 - 0.1\%,\ i_0 + 0.1\%)$ stopy dyskontowej i_0 przy której możliwa jest immunizacja (zabezpieczenie) portfela zobowiązań wartość obecna portfela obligacji przewyższa wartość obecną zobowiązań.

Podaj zakres wartości X wiedząc, że stopa rentowności strony zobowiązań jest taka sama jak stopa rentowności portfela obligacji i wynosi $i_0 = 6.5\%$ w skali roku przy kapitalizacji dyskretnej i jest to jednocześnie stopa dyskontowa, przy której możliwa jest immunizacja portfela zobowiązań:

A) $X < 2\,800$

B) $2\,800 \leq X < 3\,800$

C) $3\,800 \leq X < 4\,800$

D) $4\,800 \leq X < 5\,800$

E) $5\,800 \leq X$

5. Akcja spółki A ma obecną cenę PLN 35, zmienność σ = 0.2 i zerową stopę dywidendy. Cena europejskiej opcji kupna na akcję spółki A wystawionej z ceną wykonania PLN 34, zapadalnością za 3 miesiące oraz parametrach (*) $N(d_1) = 0.6706$ i $\Gamma = 0.1035$ wynosi PLN 2.1388. Cena innej europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję spółki A z ceną wykonania PLN 38, zapadalnością za 3 miesiące oraz parametrach $N(d_1) = 0.2514$ i $\Gamma = 0.0909$, wynosi PLN 0.4996.

Inwestor wystawia 100 europejskich opcji kupna na akcję spółki A z ceną wykonania PLN 34 i zapadalnością za 3 miesiące.

W celu zabezpieczenia tej pozycji w opcjach inwestor chce zastosować równocześnie strategię *delta-hedging* (strategię *delta*-neutralną) oraz *gamma-hedging* (strategię *gamma*-neutralną) poprzez zajęcie odpowiedniej pozycji w *n* europejskich opcjach kupna na akcję spółki A wystawionych z ceną wykonania PLN 38 i zapadalnością za 3 miesiące oraz poprzez zajęcie odpowiedniej pozycji w *k* akcjach spółki A. Przyjmujemy kapitalizację ciągłą. Zakładamy idealną podzielność aktywów i brak kosztów transakcji. Przyjmujemy, że spełnione są założenia modelu Blacka- Scholesa wyceny opcji finansowych.

Wskaż, która z poniższych odpowiedzi opisuje strategię inwestora:

A) Nabycie *n* = 113.86 opcji kupna i kupno *k* = 38.44 akcji
B) Nabycie *n* = 113.86 opcji kupna i sprzedaż *k* = 38.44 akcji
C) Nabycie *n* = 100 opcji kupna i sprzedaż *k* = 42.36 akcji
D) Wystawienie *n* = 100 opcji kupna i kupno *k* = 42.36 akcji
E) Nie istnieje strategia *delta*-*gamma*-neutralna spełniające zadane warunki.

(*) *Wskazówka:*

$N(\cdot)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego; $d_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, gdzie S_t- cena akcji w chwili t ; X-cena wykonania; σ- zmienność ceny akcji; r-stopa wolna od ryzyka; T- moment wykonania opcji.

Parametr *gamma* (Γ) opcji – wskaźnik wrażliwości, druga pochodna ceny opcji względem ceny akcji (instrumentu bazowego).

6. Przy założeniach odnośnie rynku finansowego zgodnych z modelem Blacka-Scholesa dane są:

i. $S(t)$ oznaczające proces ceny akcji zależny od czasu t, $t \geq 0$

$$S(t) = S(0) \cdot exp[(r - \delta - 0.5\sigma^2)t + \sigma \cdot W(t)]$$

gdzie $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ jest procesem **Wienera** przy mierze neutralnej względem ryzyka.

ii. $S(0) = 1$,

iii. σ jest zmiennością procesu ceny akcji i jest stałe równe 0.4,

iv. dla $t \geq 0$ akcja $S(t)$ płaci stopę dywidendy $\delta = 0.04$, kwota dywidendy wynosi $0.04 \cdot S(t) \cdot dt$ w okresie czasu między t a $(t + dt)$

v. wyrażenie $(r - \delta)$ oznacza *dryf* (przesunięcie) procesu i jest stałe równe 0.08, gdzie r oznacza wolną od ryzyka stopę procentową,

vi. wiadomo, że zmianę procesu ceny akcji opisuje równanie: $dS(t) = 0.08 \cdot S(t)dt + 0.4 \cdot S(t)dW(t), \quad t \geq 0$, tzn. krótkoterminowy wzrost ceny akcji jest proporcjonalny do obecnego poziomu cen średnio w stosunku 0.08 oraz zmienność ceny jest proporcjonalna do jej obecnego poziomu,

Rozważmy instrument pochodny, który wypłaca $\{1 + S(1) \cdot \{ln[S(1)]\}^2\}$ w momencie $t = 1$ i nie wypłaca nic w każdym innym momencie. Zakładamy kapitalizacje ciągłą.
Podaj przedział, w jakim mieści się cena PV_0 tego instrumentu pochodnego w momencie $t = 0$:

A) $PV_0 \leq 0.732$

B) $0.732 < PV_0 \leq 1.024$

C) $1.024 < PV_0 \leq 1.075$

D) $1.075 < PV_0 \leq 1.296$

E) $1.296 < PV_0 \leq 2.001$

Wskazówka:

Procesem (standardowym) **Wienera** nazywamy proces $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ z czasem ciągłym spełniający warunki:

1) $W_0 = 0$;
2) przyrosty procesu W są niezależne, czyli dla dowolnego n i dowolnego ciągu $0 < t_1 < \cdots < t_n$, zmienne losowe $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ są niezależne;
3) dla dowolnych $0 \leq s < t$ przyrost $W(t) - W(s)$ ma rozkład gaussowski, a dokładniej: $[W(t) - W(s)] \sim N(0, t - s)$;
4) proces W jest ciągły, tzn. prawie wszystkie trajektorie procesu są funkcjami ciągłymi.

7. Kredyt hipoteczny o wartości 400 000 może być spłacony na dwa sposoby ratami płatnymi na końcu każdego roku:

- 25 letnia renta o ratach tworzących ciąg arytmetyczny, którego wyraz pierwszy równy jest P a różnica wynosi X, przy stopie oprocentowania 7%,
- 30 letnia renta o ratach tworzących ciąg arytmetyczny, którego wyraz pierwszy równy jest P, a różnica wynosi Y, przy stopie oprocentowania 5%.

Wiadomo również, że kredyt o wartości 200 000 może zostać spłacony przy pomocy 20 – letniej renty ciągłej o stałej rocznej intensywności równej P + 10X – 15Y, przy stopie oprocentowania 6%.

Oblicz ile wynosi suma P + X + Y. Podaj najbliższą wartość.

A) 14 125

B) 14 325

C) 14 525

D) 14 725

E) 14 925

8. Zakład ubezpieczeń posiada w chwili obecnej następujące zobowiązania:

- świadczenie jednorazowe w kwocie 60 000 płatne po 2 latach,
- świadczenie jednorazowe w kwocie 40 000 płatne po 3 latach,
- świadczenie jednorazowe w kwocie 100 000 płatne po 10 latach,
- 5-letnia renta pewna natychmiast płatna o płatnościach 10 000 dokonywanych na końcu każdego roku,
- 10-letnia renta pewna natychmiast płatna o płatnościach 18 000 dokonywanych na końcu każdego roku.

Zakład ubezpieczeń zakupił następujące aktywa na pokrycie powyższych zobowiązań:

- obligacje 10-letnie z kuponem rocznym w wysokości 6% wartości wykupu równej wartości nominalnej wynoszącej 5000 oraz
- obligacje 2-letnie z kuponem rocznym w wysokości 4% wartości wykupu równej wartości nominalnej wynoszącej 2000.

Jaki procent środków przeznaczonych na pokrycie powyższych zobowiązań zakład ubezpieczeń powinien zainwestować w obligacje 2-letnie, aby przy stopie procentowej 5% *duration* aktywów była równa *duration* zobowiązań.

Podaj najbliższą wartość.

A) 45%

B) 47%

C) 49%

D) 51%

E) 53%

9. Spłata kredytu 75 ratami płatnymi na koniec każdego kwartału odbywa się w następujący sposób:

- pierwsze 25 rat oraz ostatnie 25 rat ma stałą wartość R,
- pozostałe raty mają stałą wartość X.

Wiadomo, że sumaryczna kwota odsetek zapłaconych w pierwszych 25 ratach jest taka sama, jak sumaryczna kwota odsetek zapłaconych w następnych 25 ratach.

Oblicz ile wynosi stosunek X/R, jeżeli kwartalna stopa procentowa jest równa 5%.

Podaj najbliższą wartość.

A) 4.0

B) 4.2

C) 4.4

D) 4.6

E) 4.8

10. Pożyczka jest spłacana za pomocą 20 rat płatnych na końcu każdego roku. Raty tworzą następujący ciąg: 29, 27, 25, …, 13, 11, 11, 12, 13, … , 19, 20.

Stopa procentowa jest równa *i*.

Wyznacz stosunek wartości kapitału pożyczki spłaconego w 6 racie do wartości kapitału spłaconego w racie 12.

Wskaż właściwy wzór.

A) $$\frac{19-a_{\overline{10|}}*v^{10}*(11*i+1)+a_{\overline{5|}}*(2-19*i)+10*v^{5}*(v^{10}-1)}{12-a_{\overline{9|}}*(12*i+1)+12*v^{9}}$$

B) $$\frac{19-a_{\overline{10|}}*v^{10}*(11*i+1)+a_{\overline{5|}}*(2+19*i)+10*v^{5}*(v^{10}-1)}{12-a_{\overline{9|}}*(12*i+1)+12*v^{9}}$$

C) $$\frac{19-a_{\overline{10|}}*v^{10}*(11*i+1)+a_{\overline{5|}}*(2-19*i)+10*v^{10}*(v^{5}-1)}{12-a_{\overline{9|}}*(12*i+1)+9*v^{9}}$$

D) $$\frac{19-a_{\overline{10|}}*v^{5}*(11*i+1)+a_{\overline{5|}}*(2+19*i)+10*v^{10}*(v^{5}-1)}{12-a_{\overline{9|}}*(12*i+1)+12*v^{9}}$$

E) $$\frac{19-a_{\overline{10|}}*v^{5}*(11*i+1)+a_{\overline{5|}}*(2-19*i)+10*v^{5}*(v^{10}-1)}{12-a_{\overline{9|}}*(12*i+1)+9*v^{9}}$$

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 marca 2012 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	B	
3	A	
4	C	
5	A	
6	C	
7	D	
8	C	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.