

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**  
**LXVII Egzamin dla Aktuariuszy z 26 maja 2014 r.**

**Część I**

**Matematyka finansowa**

**WERSJA TESTU A**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Przyjmijmy założenia modelu Blacka-Scholesa i rozważmy europejską opcję kupna na akcję niepłacącą dywidendy. Wówczas spośród poniższych stwierdzeń:

- (i) cena opcji C jako funkcja bieżącej ceny akcji jest funkcją rosnącą,
  - (ii) cena opcji C jako funkcja ceny wykonania jest funkcją rosnącą,
  - (iii) cena opcji C jako funkcja czasu pozostałego do realizacji opcji jest funkcją rosnącą,
  - (iv) cena opcji C jako funkcja współczynnika zmienności jest funkcją malejącą,
  - (v) cena opcji C jako funkcja wolnej od ryzyka stopy procentowej jest funkcją rosnącą,
- prawdziwe są:

- A) (i), (ii), (iii)
- B) (i), (iii), (v)
- C) (iii), (iv), (v)
- D) (i), (iv), (v)
- E) (ii), (iv), (v)

2. Wykonując obliczenia analizy wrażliwości Embedded Value (EV) na 31.12.2013 firma ubezpieczeniowa XYZ chce oszacować zmianę wartości niezrealizowanych zysków/strat (różnica pomiędzy wartością rynkową a wartością księgową) w portfelu obligacji w efekcie równoległego przesunięcia struktury stóp procentowych o jeden punkt procentowy.

Firma posiada 100 000 obligacji typu A oraz 100 000 obligacji typu B, o następujących parametrach:

Obligacja A

- obligacja 10-letnia o nominale 1000 PLN, zakupiona 31.12.2012,
- obligacja płaci kupon 4% na koniec każdego roku (zakładamy, iż wycenę EV przeprowadzamy natychmiast po płatności kuponu),
- cena zakupu – 614 PLN
- wartość księgowa obligacji otrzymywana jest w oparciu o amortyzację liniową (tzn. odpis amortyzacyjny wyznaczany jest w momencie zakupu obligacji na podstawie różnicy pomiędzy nominałem a ceną zakupu oraz czasu do zapadalności obligacji; płatności kuponów nie mają wpływu na amortyzację obligacji).

Obligacja B

- obligacja 5-letnia o nominale 1000 PLN, zakupiona 31.12.2011,
- obligacja płaci kupon 5.5% na koniec każdego roku (zakładamy, iż wycenę EV przeprowadzamy natychmiast po płatności kuponu),
- cena zakupu – 822 PLN
- wartość księgowa obligacji otrzymywana jest w oparciu o amortyzację liniową.

Zakładając, że na 31.12.2013 rynkowe stopy procentowe *forward* są stałe i wynoszą 4% proszę oszacować zmianę wartości niezrealizowanych zysków/strat w portfelu obligacji firmy XYZ, w scenariuszu analizy wrażliwości zakładającym natychmiastowy wzrost stóp procentowych do poziomu 5% (proszę podać najbliższą wartość):

- A) -5%
- B) -10%
- C) -15%
- D) -20%
- E) -25%

3. Europejska opcja kupna typu *forward start* na niepłacącą dywidendy akcją  $\mathcal{A}$  to kontrakt zawierany i opłacany w chwili  $T_0$ , zakładający, że w chwili  $T_1 > T_0$  jego posiadacz otrzyma europejską opcję kupna z datą wygaśnięcia  $T_2$  i ceną wykonania  $K = S_{T_1}$ , gdzie  $S_{T_1}$  jest ceną akcji w chwili  $T_1$ . Przyjmując założenia modelu Blacka-Scholesa oraz zakładając, że:

- stopa wolna od ryzyka  $r = 4\%$ ,
- zmienność wynosi  $\sigma = 20\%$ ,
- $T_0 = 0, T_1 = 0.5, T_2 = 1.5$ ,
- cena akcji w chwili  $T_0$  wynosi  $S_{T_0} = 100$ ,

proszę wyznaczyć cenę opisanej wyżej europejskiej opcji kupna typu *forward start* w chwili  $T_0$  (proszę podać najbliższą wartość):

- A) 6.62
- B) 7.72
- C) 8.82
- D) 9.93
- E) 11.02

4. Bank X emituje obligację o nominale 1 mln PLN, okresie do wygaśnięcia 2 lata i kuponie 5% płatnym na koniec roku. Na koniec każdego roku (przed płatnością kuponu) dokonywana jest ocena wypłacalności banku. Stwierdzenie niewypłacalności powoduje, że nie nastąpią już żadne płatności z tej obligacji. Do wyceny opisanej obligacji inwestor stosuje model oparty na następujących założeniach:

- wolna od ryzyka roczna stopa procentowa wynosi 5%,
- kapitalizacja jest dyskretna,
- ocena poziomu ryzyka kredytowego banku w modelu dokonywana jest na koniec każdego roku w oparciu o zmianę ceny akcji tego banku w stosunku do końca roku poprzedniego, tzn. w przypadku wzrostu ceny akcji zakłada się, że prawdopodobieństwo niewypłacalności maleje dwukrotnie, natomiast w przypadku jej spadku rośnie dwukrotnie, przy zakładanym poziomie wyjściowym 4%,
- prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji w ciągu roku wynosi 60%, a spadku 40%.

Wykorzystując powyższy model inwestor otrzyma następującą wycenę obligacji w chwili emisji (podać najbliższą odpowiedź):

- A) 1.04 mln PLN
- B) 1.00 mln PLN
- C) 0.99 mln PLN
- D) 0.96 mln PLN
- E) 0.91 mln PLN

- 
5. W celu zabezpieczenia zapadających za cztery lata wypłat z portfela zobowiązań na kwotę 100 000 PLN, zakład ubezpieczeń nabył czteroletnią obligację zerokuponową o nominale 100 000 PLN za cenę  $100\,000/1.05^4$ . Obligacja ta posiada opcję wcześniejszego wykupu przez emitenta za 2 lata od emisji po cenie  $100\,000/1.03^2$ . Opcja ta będzie wykonana przez emitenta, jeśli tylko będzie to dla niego korzystne. Jeśli nastąpi wcześniejszy wykup obligacji, to otrzymane przez zakład ubezpieczeń środki będą natychmiast reinwestowane w dwuletnie obligacje zerokuponowe. Wiadomo, że dwuletnia stopa zerokuponowa (o rocznej kapitalizacji) za dwa lata ma rozkład jednostajny na przedziale  $[2\%, 8\%]$ . Oczekiwana różnica pomiędzy wypłatą z inwestycji, a kwotą wypłat z portfela zobowiązań wyniesie (podać najbliższą odpowiedź):
- A) -13 915.77 PLN
  - B) -5 931.55 PLN
  - C) -161.29 PLN
  - D) 0.00 PLN
  - E) 843.89 PLN

6. Rozważmy inwestycję, której wysokość chwili  $t = 0$  wynosi 1. Następnie, w sposób ciągły dokonywane są wpłaty z intensywnością  $\alpha(t) = \frac{\beta(t)}{2 \cdot (1+t)^2}$ , gdzie  $\beta(t)$  oznacza zakumulowaną na moment  $t > 0$  wartość zainwestowanych do tego momentu środków. Ciągła intensywność oprocentowania tej inwestycji wynosi  $\delta(t) = \frac{1}{(1+t)}$ , dla  $t \geq 0$ . Wartość  $\beta(3)$  wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

- 
7. Renta wieczysta wypłaca na końcu roku  $n$  kwotę  $n \cdot (n + 5)$ , gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Stopa oprocentowania jest równa 3%.

Niech  $K$  oznacza zdyskontowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, natomiast  $S$  niech będzie sumą dwóch największych wartości zdyskontowanych rat. Oblicz ile wynosi iloraz  $K/S$ . Podaj najbliższą wartość.

- A) 62.3
- B) 62.4
- C) 62.5
- D) 62.6
- E) 62.7

8. Kredyt o wartości 150 000 będzie spłacany przez okres 9 lat ratami płatnymi na końcu każdego roku, przy czym każda następna rata jest o 1% większa od poprzedniej.

Oprocentowanie kredytu jest zmienne i wynosi:

- 9% w roku 1, 3 i 7,
- 7.5% w roku 2 i 4,
- 5% w roku 6 i 9,
- $i$  w roku 5,
- $j$  w roku 8.

Wiadomo, że pierwsza rata ma taką wysokość, że kredyt mógłby być spłacony w powyższym okresie równymi ratami o tej wysokości, płatnymi na końcu każdego roku, przy oprocentowaniu stałym równym 8%.

Wiedząc, że w 7 racie zapłacono odsetki w kwocie 5 895.82 oblicz ile wynosi stosunek  $i/j$ .

Podaj najbliższą wartość.

- A) 1.50
- B) 1.52
- C) 1.54
- D) 1.56
- E) 1.58

9. Zgodnie z umową kredyt w wysokości 500 000 ma być spłacany w okresie 25 lat następująco:
- przez pierwsze 10 lat, ratami płatnymi na koniec każdego roku o wartości  $R$ , przy oprocentowaniu 10%,
  - przez następne 15 lat, ratami płatnymi na koniec każdego roku o wartości  $S$ , przy oprocentowaniu 7%.

Bezpośrednio po zapłaceniu 20 raty kredytobiorca dokonał spłaty 25% aktualnego zadłużenia i uzgodnił z bankiem, że spłaci pozostałą część zadłużenia w ciągu 5 lat ratami płatnymi na koniec każdego roku o wartości  $T$ , przy oprocentowaniu 8%.

Wiedząc, że suma spłat kapitału, jakich dokonał kredytobiorca w 8 i 17 racie spłaty kredytu wynosi 29 860.50 oblicz, ile wyniesie sumaryczna kwota odsetek, jakie zapłaci kredytobiorca w czasie spłaty kredytu w ostatnich 5 latach. Podaj najbliższą wartość.

- A) 42 550
- B) 42 560
- C) 42 570
- D) 42 580
- E) 42 590

**10.** Umowa ubezpieczenia na życie i dożycie przewiduje możliwość wypłaty świadczenia, w przypadku dożycia do określonego wieku, w formie 20 letniej renty pewnej, płatnej w równych ratach na końcu kolejnych lat. W przypadku śmierci ubezpieczonego w okresie wypłacania renty jest ona dalej wypłacana współmałżonkowi lub innej wskazanej przez ubezpieczonego osobie. Ubezpieczony, któremu po dożyciu do końca okresu ubezpieczenia należy się świadczenie jednorazowe w wysokości 250 000, wybiera opcję wypłaty świadczenia w formie renty, na co przeznaczając całą powyższą kwotę. Zakład ubezpieczeń do kalkulacji raty renty oraz obliczania wysokości rezerw technicznych (rezerwa techniczna to aktualna wartość renty) stosuje techniczną stopę procentową w wysokości 3%.

Umowa ubezpieczenia zakłada, że zakład ubezpieczeń dzieli się z ubezpieczonym zyskiem uzyskanym przy lokowaniu aktywów stanowiących pokrycie rezerw technicznych. Oznacza to, że przy każdej płatności renty zakład wypłaci ubezpieczonemu 85% zysku osiągniętego ponad stopę techniczną w ostatnim roku (liczonego od kwoty rezerwy technicznej na początku roku).

Wiadomo, że stopy zwrotu z aktywów stanowiących pokrycie rezerw były następujące:

- 5.1% w latach 1 – 4,
- 4.7% w latach 5 – 8,
- $i$  w latach 9 – 12,
- 2.9% w latach 13 – 16
- 4.1% w latach 17 – 20

Oblicz, ile wynosi  $i$  wiedząc, że suma wypłat z zysku w całym okresie wypłacania renty wyniosła 36 185. Podaj najbliższą wartość.

- A) 4.2%
- B) 4.3%
- C) 4.4%
- D) 4.5%
- E) 4.6%

**Egzamin dla Aktuariuszy z 26 maja 2014 r.****Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko: .....

Pesel: .....

OZNACZENIE WERSJI TESTU .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja <sup>♦</sup>
1	B	
2	D	
3	D	
4	E	
5	C	
6	E	
7	B	
8	E	
9	E	
10	B	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.