# Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

# LXVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 29 września 2014 r.

## Część I

## Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.......................................................................

Czas egzaminu: 100 minut

**1.** W chwili $T_0$ firma ABC wyemitowała 10 zapadających w chwili $T_0 + 2$ europejskich opcji kupna $O_1^{\mathcal{A}}$ o cenie wykonania $K = 110$ na niepłacącą dywidendy akcję $\mathcal{A}$. W celu zabezpieczenia przyszłych zobowiązań, w chwili emisji firma ABC zakupiła $c_0$ (zakładamy całkowitą podzielność liczby akcji) akcji $\mathcal{A}$, gdzie $c_0$ było stałą dobraną w taki sposób, aby portfel zbudowany z opcji $O_1^{\mathcal{A}}$ oraz akcji $\mathcal{A}$ miał zerowy parametr grecki delta.

W chwili $T_0$ emisji opcji kupna $O_1^{\mathcal{A}}$:

- stopa wolna od ryzyka wynosiła $r = 5\%$,
- zmienność cen akcji $\mathcal{A}$ wynosiła $\sigma = 9\%$,
- cena wykonania $K$ wynosiła $K = 110$,
- cena akcji $\mathcal{A}$ wynosiła $S_{T_0}^{\mathcal{A}} = 100$

W chwili $T_0 + 1$ firma ABC ponownie zbadała deltę swojego portfela i ustaliła, że przy aktualnych warunkach rynkowych powinna posiadać $c_1$akcji $\mathcal{A}$ (tak, aby portfel ponownie miał zerowy parametr grecki delta). W chwili $T_0 + 1$:

- stopa wolna od ryzyka wynosiła $r = 4\%$,
- zmienność cen akcji $\mathcal{A}$ wynosiła $\sigma = 8\%$,
- cena akcji $\mathcal{A}$ wynosiła $S_{T_0+1}^{\mathcal{A}} = 106$.

Przyjmując, że ceny wszystkich opcji wyznaczane są w oparciu o model Blacka-Scholesa (bez żadnych dodatkowych narzutów) proszę wyznaczyć wartość $c_0 \cdot S_{T_0}^{\mathcal{A}} + (c_1 - c_0) \cdot S_{T_0+1}^{\mathcal{A}}$ (proszę podać najbliższą wartość):

A) 510
B) 520
C) 530
D) 540
E) 550

**2.** Firma ABC chce ocenić ryzyko związane z inwestycją przy użyciu jednej ze standardowych miar ryzyka. W celu oszacowania ryzyka wybrana została miara *expected shortfall* ($ES_\alpha$) zdefiniowana jako:

$$ES_\alpha = \frac{1}{\alpha}\left\{\boldsymbol{E}\left(X \cdot \mathbf{1}_{X \le x_\alpha}\right) + x_\alpha \cdot \left(\alpha - \boldsymbol{P}(X \le x_\alpha)\right)\right\},$$

gdzie

- $X$ jest zmienną losową określającą różnicę pomiędzy kapitałem na końcu inwestycji, a kapitałem zainwestowanym,
- $x_\alpha = inf\{x \in \mathbb{R}: P(X \le x_\alpha) \ge \alpha\}$ jest kwantylem rzędu $\alpha$ rozkładu zmiennej losowej $X$,
- funkcja $\mathbf{1}_{X \le x_\alpha}$ przyjmuje wartość 1, gdy spełniony jest warunek $X \le x_\alpha$ i 0 w przeciwnym przypadku.

Firma ABC zakłada zainwestowanie w chwili 0 kwoty PLN 1 mln na 3 lata. Do wyceny firma przyjmuje założenie, że w ciągu każdego roku inwestycji kapitał z początku roku może urosnąć o 2% z prawdopodobieństwem 80% bądź zmaleć o 4.3% z prawdopodobieństwem 20%. Przy takich założeniach $ES_{15\%}$ wynosi (proszę podać najbliższą wartość):

A) – 60 000
B) – 50 000
C) – 40 000
D) – 30 000
E) – 20 000

**3.** Na przetargu zaoferowano bony skarbowe z 13-tygodniowym terminem wykupu o łącznej wartości nominalnej PLN 10 mln. Złożone zostały następujące oferty zakupu:

- PLN 5 mln przy cenie PLN 98.20 za PLN 100.00 nominału,
- PLN 4 mln przy cenie PLN 98.60 za PLN 100.00 nominału,
- PLN 3 mln przy cenie PLN 98.40 za PLN 100.00 nominału.
- PLN 2 mln przy cenie PLN 98.80 za PLN 100.00 nominału.

Oferty były rozpatrywane i realizowane w kolejności począwszy od najbardziej korzystnej dla oferenta, aż do wyczerpania dostępnego wolumenu oferowanych bonów (tj. w przypadku braku możliwości realizacji pełnej oferty realizowana była jej część aż do wyczerpania dostępnego wolumenu oferowanych bonów). Średnia stopa dyskontowa dla sprzedanych na przetargu bonów (przy zastosowaniu konwencji $\frac{ACT}{360}$, gdzie $ACT$ oznacza faktyczną liczbę dni w okresie) wyniosła (proszę podać najbliższą wartość):

A) 5.48%
B) 5.58%
C) 5.68%
D) 5.78%
E) 5.88%

**4.** *Duration* renty $a_{\overline{10|}}$ wynosi 5.10, a renty $(Ia)_{\overline{10|}}$ wynosi 6.70. Przy tych założeniach *duration* renty $(Da)_{\overline{10|}}$ wynosi (proszę podać najbliższą wartość):

A) 1.39
B) 3.72
C) 7.09
D) 8.00
E) 49.40

**5.** Wiadomo, że w chwili 0 cena obligacji zerokuponowej zapadającej w chwili $T > 0$ wynosi:

$$P(0,T) = \exp(-0.1T).$$

Wiadomo ponadto, że krzywa stóp spot ma postać $R(0,s) = 0.1$, dla $0 \leq s < 1$. Następnie, dla $s \geq 1$ z prawdopodobieństwem $q > 0$ opisuje ją funkcja

$$R(1,s) = 0.1 + f(s),$$

zaś z prawdopodobieństwem $1 - q$ opisuje ją funkcja

$$R(1,s) = 0.1 - f(s),$$

dla pewnej ustalonej funkcji $f(s) > 0$, dla $s > 1$. Wiedząc, że $f(2) = 0.075$ oraz, że rynek nie dopuszcza arbitrażu wyznaczyć wartość $f(4)$ (proszę podać najbliższą odpowiedź):

A) 0
B) 0.025
C) 0.075
D) 1
E) $+\infty$

**6.** Funkcja intensywności oprocentowania rachunku w chwili $t$ dla kwoty zainwestowanej w chwili $s$, $0 \leq s \leq t$, wynosi $\delta(s,t) = (1 + 2s + t)^{-1}$. Rozważmy następujące strategie inwestycyjne realizowane w horyzoncie czasu [0,2]:

- kwota $K(0)$ inwestowana jest w chwili 0 i utrzymywana na rachunku do chwili 2,
- kwota $K(0)$ inwestowana jest w chwili 0, następnie w chwili 1 wypłacana jest jej zakumulowana wartość, która natychmiast jest reinwestowana na tym samym rachunku (zgodnie z zadaną intensywnością oprocentowania).

Niech $K_1(2)$ i $K_2(2)$ oznaczają zakumulowane na tym rachunku na koniec inwestycji kwoty dla pierwszej i drugiej z wymienionych strategii odpowiednio. Stosunek tych kwot, tzn. $K_1(2)/K_2(2)$ wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

A) 0.8

B) 0.9

C) 1.0

D) 1.1

E) 1.2

**7.** Kredyt hipoteczny o wartości $K$ jest spłacany przez okres 20 lat ratami płatnymi na końcu każdego roku. Oprocentowanie kredytu wynosi $i$.

Zaraz po zapłaceniu 10 raty kredytobiorca wystąpił do banku o zmianę sposobu dalszego spłacania kredytu. Ustalone zostało, że:

- kredytobiorca wpłaci niezwłocznie kwotę o wartości $P$,
- pozostałe zadłużenie będzie spłacać przez następne 10 lat ratami, płatnymi na końcu każdego roku, przy czym każda rata, począwszy od drugiej, będzie mniejsza od poprzedniej o stałą kwotę $c$.

Bank zgodził się na tę zmianę pod warunkiem, że wysokość nowych rat zostanie ustalona na takim poziomie, że ciąg płatności uwzględniający już dokonane wpłaty (włącznie z kwotą jednorazową) oraz przyszłe raty, stanowić będzie spłatę tego kredytu przy założeniu, że oprocentowanie od początku spłat było większe od pierwotnie ustalonego i wynosiło $j$ ($j > i$).

Proszę wskazać, który z poniższych wzorów wyraża wartość pierwszej raty, po zmianie sposobu spłacania kredytu.

A) $$\frac{K\cdot j\cdot(1+j)^{20}\cdot a_{\overline{10}|i}+c\cdot(s_{\overline{10}|j}-10)\cdot a_{\overline{10}|j}-(P\cdot a_{\overline{20}|i}+K\cdot s_{\overline{10}|j})\cdot j\cdot(1+j)^{10}}{a_{\overline{10}|j}\cdot a_{\overline{20}|i}\cdot j\cdot(1+j)^{10}}$$

B) $$\frac{K\cdot j\cdot(1+j)^{10}\cdot a_{\overline{20}|i}+c\cdot(s_{\overline{10}|j}+10)\cdot a_{\overline{20}|j}-(P\cdot a_{\overline{10}|i}+K\cdot s_{\overline{10}|j})\cdot j\cdot(1+j)^{20}}{a_{\overline{10}|i}\cdot a_{\overline{20}|j}\cdot j\cdot(1+j)^{10}}$$

C) $$\frac{K\cdot j\cdot(1+j)^{10}\cdot a_{\overline{10}|i}+c\cdot(s_{\overline{10}|j}-10)\cdot a_{\overline{20}|i}-(P\cdot a_{\overline{20}|i}+K\cdot s_{\overline{10}|j})\cdot j\cdot(1+j)^{10}}{a_{\overline{10}|j}\cdot a_{\overline{20}|j}\cdot j\cdot(1+j)^{10}}$$

D) $$\frac{K\cdot j\cdot(1+j)^{20}\cdot a_{\overline{20}|i}+c\cdot(s_{\overline{10}|j}-10)\cdot a_{\overline{20}|i}-(P\cdot a_{\overline{20}|i}+K\cdot s_{\overline{10}|j})\cdot j\cdot(1+j)^{10}}{a_{\overline{10}|j}\cdot a_{\overline{20}|i}\cdot j\cdot(1+j)^{10}}$$

E) $$\frac{K\cdot j\cdot(1+j)^{20}\cdot a_{\overline{20}|i}+c\cdot(s_{\overline{10}|j}+10)\cdot a_{\overline{20}|i}-(P\cdot a_{\overline{10}|i}+K\cdot s_{\overline{10}|j})\cdot j\cdot(1+j)^{20}}{a_{\overline{10}|i}\cdot a_{\overline{20}|i}\cdot j\cdot(1+j)^{10}}$$

**8.** Zasady spłaty kredytu, oprocentowanego na poziomie 6%, są następujące:

- okres spłaty wynosi 20 lat,
- raty są płatne na końcu każdego roku,
- raty płatne na końcu lat nieparzystych mają jednakową wartość,
- raty płatne na końcu lat parzystych również mają jednakową wartość.

Wiedząc, że odsetki zapłacone w 6 racie wyniosą 8 240.80, a spłata kapitału dokonana w 15 racie jest równa 7 886.60, proszę obliczyć wartość udzielonego kredytu.

Proszę podać najbliższą wartość.

A) 150 000
B) 160 000
C) 170 000
D) 180 000
E) 190 000

**9.** Renta wieczysta wypłaca na końcu roku $k$ kwotę $\frac{(1{,}5)^{k-1}}{2 \cdot k - 1}$, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots$

Dla jakiej wartości czynnika dyskontującego wartość obecna tej renty wynosi 1.15?

Proszę podać najbliższą wartość.

A) 0.56

B) 0.57

C) 0.58

D) 0.59

E) 0.60

**10.** Wypłata świadczenia z tytułu ubezpieczenia na życie może być dokonana w formie renty pewnej 20 letniej, płatnej na końcu każdego roku w kwocie 12 000, przy zastosowaniu stopy technicznej na poziomie 3%.

Zakład ubezpieczeń proponuje beneficjentowi, który wybrał świadczenie w formie powyższej renty, wypłatę tego świadczenia w nieco odmiennej formie. Zgodnie z propozycją środki należne beneficjentowi zostaną umieszczone na koncie oszczędnościowym o zmiennej stopie oprocentowania, która wynosi w pierwszych 12 latach 3.5%, a w pozostałych 8 latach 4%. Wypłaty świadczeń z konta będą odbywały się na końcu każdego roku, po doliczeniu odsetek należnych za ostatni rok.

Kwota wypłaty na końcu roku $n$ będzie równa racie renty o następującej charakterystyce:

- renta o równych ratach, płatnych na końcu każdego roku, począwszy od końca roku $n$ do końca roku 20,
- wartość obecna renty w chwili wypłaty pierwszej raty, obliczona przy zastosowaniu stopy procentowej 3%, jest równa aktualnej wartości środków zgromadzonych na koncie, po doliczeniu odsetek za ostatni rok.

Zakładając, że wypłaty świadczeń będą dokonywane w sposób zaproponowany przez zakład ubezpieczeń, proszę obliczyć wartość świadczenia wypłacanego na końcu 15 roku.

Proszę podać najbliższą wartość.

A) 13 100
B) 13 200
C) 13 300
D) 13 400
E) 13 500

## Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1.0 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3.0 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.99900 |
| 3.1 | 0.99903 | 0.99906 | 0.99910 | 0.99913 | 0.99916 | 0.99918 | 0.99921 | 0.99924 | 0.99926 | 0.99929 |
| 3.2 | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.99940 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | 0.99950 |
| 3.3 | 0.99952 | 0.99953 | 0.99955 | 0.99957 | 0.99958 | 0.99960 | 0.99961 | 0.99962 | 0.99964 | 0.99965 |
| 3.4 | 0.99966 | 0.99968 | 0.99969 | 0.99970 | 0.99971 | 0.99972 | 0.99973 | 0.99974 | 0.99975 | 0.99976 |
| 3.5 | 0.99977 | 0.99978 | 0.99978 | 0.99979 | 0.99980 | 0.99981 | 0.99981 | 0.99982 | 0.99983 | 0.99983 |
| 3.6 | 0.99984 | 0.99985 | 0.99985 | 0.99986 | 0.99986 | 0.99987 | 0.99987 | 0.99988 | 0.99988 | 0.99989 |
| 3.7 | 0.99989 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99991 | 0.99991 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 |
| 3.8 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99995 |
| 3.9 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99997 | 0.99997 |

# Egzamin dla Aktuariuszy z 29 września 2014 r.

## Matematyka finansowa

## Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ..................................................................

Pesel: ...........................................

OZNACZENIE WERSJI TESTU ............

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | C | |
| 2 | B | |
| 3 | D | |
| 4 | B | |
| 5 | B | |
| 6 | E | |
| 7 | D | |
| 8 | B | |
| 9 | E | |
| 10 | A | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.