

Zadanie 1.

O niezależnych zmiennych losowych N, M_1, M_2, M_3 wiemy, że:

- N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 100
- M_1, M_2, M_3 mają ten sam rozkład dwupunktowy o prawdopodobieństwach:

$$\Pr(M_1 = 1) = 0.9, \quad \Pr(M_1 = 0) = 0.1.$$

Zmienne losowe K oraz J to następujące dwie funkcje zmiennych N, M_1, M_2, M_3 :

- $K = M_1 + M_2 + \dots + M_N$, oraz:
- $J = N - K$.

Rozważmy ciąg a_0, a_1, a_2, \dots warunkowych wartości oczekiwanych $a_k = E(J|K = k)$.

Spośród poniższych stwierdzeń dotyczących tego ciągu wybierz stwierdzenie prawdziwe:

- (A) jest to ciąg stały
- (B) jest to ciąg rosnący
- (C) jest to ciąg malejący
- (D) istnieje taka liczba dodatnia x , że: $k < x \Rightarrow a_{k+1} > a_k$, oraz $k > x \Rightarrow a_{k+1} < a_k$
- (E) istnieje taka liczba dodatnia x , że: $k < x \Rightarrow a_{k+1} < a_k$ oraz $k > x \Rightarrow a_{k+1} > a_k$

Zadanie 2.

Łączna wartość szkód z pewnego portfela ryzyk:

$W = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$, gdzie Y_1, Y_2, Y_3, \dots to wartości poszczególnych szkód,

ma złożony rozkład Poissona.

Ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad wartość 2, a więc łączna wartość wypłaconych przez niego odszkodowań wyniesie:

$$Z = (Y_1 - 2)_+ + (Y_2 - 2)_+ + \dots + (Y_N - 2)_+.$$

Jeśli wiadomo, że:

$$E(N) = 100,$$

$$E(W) = 500,$$

$$\text{var}(W) = 3200,$$

$$E[(W - EW)^3] = 30000,$$

$$\Pr(Y_1 \geq 2) = 1,$$

to współczynnik skośności (stosunek momentu centralnego rzędu 3 do wariancji w potęgę 3/2) zmiennej Z wynosi:

- (A) 1/8
- (B) 1/6
- (C) 1/4
- (D) 1/3
- (E) 1/2

Zadanie 3.

Łączna wartość szkód $W = Y_1 + \dots + Y_N$ w pewnym portfelu ryzyk ma rozkład złożony dwumianowy o parametrach (n, q, F) , z wartością oczekiwaną liczby szkód równą $E(N) = nq$. Przyjmujemy $n > 1$.

Rozkład wartości pojedynczej szkody jest dwupunktowy:

$$\Pr(Y_1 = 1) = \alpha, \quad \Pr(Y_1 = 2) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in (0, 1)$$

Dla $q = 0.51$ można tak dobrać liczbę $\alpha \in (0, 1)$, że zmienna W będzie miała rozkład dwumianowy. Liczba ta znajduje się w przedziale:

- (A) (0.75, 0.80)
- (B) (0.80, 0.85)
- (C) (0.85, 0.90)
- (D) (0.90, 0.95)
- (E) (0.95, 1.00)

Zadanie 4.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- T_1, T_2, \dots, T_N oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go, ..., N -tego, przy czym numeracja roszczeń od 1-go do N -tego jest całkowicie przypadkowa (porządek liczb T_1, T_2, \dots, T_N jest losowy)

Założmy, że:

- zmienne losowe N, T_1, T_2, T_3, \dots są niezależne,
- zmienne losowe T_1, T_2, T_3, \dots mają identyczny rozkład wykładniczy o gęstości danej dla dodatnich t wzorem: $f(t) = \ln(3) \cdot 3^{-t}$,
przy czym jednostką pomiaru czasu jest miesiąc
- zmienna losowa N ma rozkład ucięty Poissona o funkcji prawdopodobieństwa:

$$\Pr(N = k) = \frac{(\ln 2)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszego miesiąca od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$, jest mniejsza lub równa 1.

Prawdopodobieństwo, że z tego wypadku pojawią się jeszcze następne roszczenia:

$$\Pr(N > 1 | A)$$

Z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 0.307
- (B) 0.281
- (C) 0.256
- (D) 0.234
- (E) 0.206

Zadanie 5.

Łączna wartość szkód:

- $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N,$

ma przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ warunkowy rozkład złożony Poissona o oczekiwanej liczbie szkód równej λ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody danym dla $y \geq 0$ gęstością:

- $f_{Y|\Lambda=\lambda}(y) = \frac{\lambda}{a+b\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda}{a+b\lambda}y\right),$ gdzie $a \geq 0$, oraz $b > 0$.

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład dany dla $x \geq 0$ gęstością:

- $f_{\Lambda}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x).$

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:

- $a = 1, b = 10$
- $\alpha = 3, \beta = 30$

Wobec tego różnica:

- $E(N) \cdot E(Y) - E(X)$

wynosi:

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{9}{11}$

(E) 1

Zadanie 6.

Likwidacja szkody losowo wybranej spośród szkód zaszyłych w miesiącu t następuje:

- z prawdopodobieństwem $1/10$ jeszcze w ciągu tego samego miesiąca,
- z prawdopodobieństwem $(3/10) \cdot (2/3)^{k-1}$ w ciągu miesiąca $t+k$, $k=1,2,3,\dots$.

Reguła ta obowiązuje niezmiennie dla dowolnego całkowitego t .

Niech zdarzenie A polega na równoczesnym zajściu poniższych czterech warunków:

- liczba szkód zaistniałych i oczekujących na likwidację na koniec miesiąca $t-3$ wynosi 270,
- Liczba szkód zaistniałych w ciągu miesiąca $t-2$ wynosi 90,
- Liczba szkód zaistniałych w miesiącu $t-1$ wynosi 100,
- Liczba szkód zaistniałych w miesiącu t wynosi 110.

Warunkowa oczekiwana liczba szkód zaistniałych i niezlikwidowanych na koniec miesiąca t , pod warunkiem zajścia zdarzenia A , wynosi:

- (A) 275
- (B) 282
- (C) 290
- (D) 297
- (E) 305

Zadanie 7.

Rozważamy proces dyskretny nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$$U_n = u + (c - du)n - \sum_{k=1}^n W_k, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{gdzie:}$$

- $u \equiv U_0$ - to nadwyżka początkowa
- c - to kwota rocznej składki
- d - to stopa dywidendy wypłacanej corocznie akcjonariuszom od kapitału u
- W_1, W_2, W_3, \dots - to niezależne zmienne o takim samym rozkładzie normalnym z parametrami μ_W i σ_W^2 , wyrażające łączne wartości szkód w kolejnych latach

Wyznaczamy równocześnie składkę c oraz kapitał początkowy u w taki sposób, aby składka była jak najniższa, przy warunku, iż prawdopodobieństwo ruiny, a więc zdarzenia, iż:

- dla pewnego $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ zajdzie $U_n < 0$

równe jest z góry zadanej liczbie ψ .

W obliczeniach posługujemy się wzorem przybliżonym na prawdopodobieństwo ruiny opartym na aproksymacji procesu U_n ciągłym procesem Wienera o wartościach oczekiwanych i wariancjach rocznych przyrostów takich jak w procesie U_n .

Przy założeniach liczbowych:

$$\psi = \exp(-3), \quad \mu_W = 1000, \quad \sigma_W^2 = 10000, \quad d = 6\%,$$

najniższa wartość składki c spełniająca ww. warunki znajduje się w przedziale:

- (A) (1025, 1034)
- (B) (1034, 1044)
- (C) (1044, 1055)
- (D) (1055, 1067)
- (E) (1067, 1080)

Zadanie 8.

Rozważmy parę zmiennych losowych T i D , oznaczających odpowiednio:

- T – moment czasu, w którym zaszła szkoda,
- D – czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do jej likwidacji.

Jednostką pomiaru czasu jest jeden rok.

Założmy, że T oraz D są niezależne, przy czym:

- T ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 2)$
- D ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej jeden.

Sumę $(T + D)$ interpretujemy jako moment czasu, w którym zlikwidowano szkodę.

Warunkową wartość oczekiwaną $E(D|T + D > 2)$ interpretujemy jako oczekiwany odstęp w czasie pomiędzy momentem zajścia a momentem likwidacji szkody, pod warunkiem iż szkoda, do której doszło na odcinku czasu $(0, 2)$, do końca tego odcinka czasu zachowała status szkody niezlikwidowanej.

$E(D|T + D > 2)$ znajduje się w przedziale:

- (A) $(0.0, 1.6)$
- (B) $(1.6, 1.65)$
- (C) $(1.65, 1.7)$
- (D) $(1.7, 1.75)$
- (E) $(1.75, \infty)$

Zadanie 9.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

gdzie:

- u – to nadwyżka początkowa,
- $S(t)$ - to skumulowana wartość szkód tworząca złożony proces Poissona z intensywnością λ , z wykładniczymi szkodami o wartości oczekiwanej $1/\beta$
- Parametr intensywności składki wynosi $c = \frac{4\lambda}{3\beta}$

Wiemy, że przy aktualnej wysokości kapitału początkowego u spełniony jest warunek:

- $\Psi(u) = 1/4$.

Niech zdarzenie A oznacza, iż do ruiny doszło, a więc dla pewnego $t > 0$ zaszedł warunek $U(t) < 0$.

Niech zdarzenie B oznacza, iż do ruiny doszło w tym momencie, w którym po raz pierwszy nadwyżka $U(t)$ spadła poniżej wartości kapitału początkowego u .

Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(B|A)$ mieści się w przedziale:

- (A) (0.00, 0.01)
- (B) (0.01, 0.02)
- (C) (0.02, 0.03)
- (D) (0.03, 0.04)
- (E) (0.04, 1.00)

Zadanie 10.

Rozkład zmiennej losowej X ma dwie ekwiwalentne reprezentacje:

- jako rozkład złożony geometryczny, z liczbą składników N o rozkładzie:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

oraz wartością pojedynczego składnika o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą $1/2$

- jako rozkład złożony dwumianowy, gdzie liczba składników N może wynieść tylko zero lub jeden, zaś wartość składnika (o ile $N = 1$) ma rozkład:

- (A) wykładniczy o wartości oczekiwanej 2
- (B) wykładniczy o wartości oczekiwanej 3
- (C) Gamma o parametrach (3,1)
- (D) Gamma o parametrach (3, 3/2)
- (E) Gamma o parametrach (2, 2/3)

Egzamin dla Aktuariuszy z 20 czerwca 2011 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	C	
3	B	
4	E	
5	B	
6	A	
7	D	
8	C	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.