Zadanie 1.

Mamy dany ciąg liczb $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ z przedziału $(0,1)$, oraz ciąg $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ liczb dodatnich. Rozważmy dwie zmienne losowe:

- $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, gdzie X_i ma złożony rozkład dwumianowy o parametrach $(1, q_i, F_i)$, wszystkie składniki X_i są niezależne, zaś oczekiwana wartość szkody o dystrybuancie F_i wynosi m_i;
- Z o rozkładzie złożonym dwumianowym i parametrach $(n, \bar{q}, F)$, gdzie $\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{n}$, zaś dla każdego $x \in R$ zachodzi: $F(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i F_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$.

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia:

$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}$, oraz:

$\overline{(mq)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i q_i}{n}$.

Różnica wariancji $var(Z) - var(X)$ dana jest wzorem:

(A) $\sum_{i=1}^{n}(q_i m_i - \bar{q}\bar{m})^2$

(B) $\sum_{i=1}^{n} {q_i}^2 (m_i - \bar{m})^2$

(C) $\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2 (m_i - \bar{m})^2$

(D) $\sum_{i=1}^{n}[q_i m_i - \overline{(mq)}]^2$

(E) $\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2 {m_i}^2$

Zadanie 2.

Pewien podmiot maksymalizuje wartość oczekiwaną funkcji użyteczności o postaci:
$u(x) = \ln(x)$.

Tymczasem majątek tego podmiotu wynosi w. Połowa majątku narażona jest jednak na ryzyko całkowitej utraty, co może nastąpić z prawdopodobieństwem q.

Od tego ryzyka można się na rynku ubezpieczyć. Rynek oferuje kontrakty z udziałem własnym ubezpieczonego, wyceniane według oczekiwanej wartości odszkodowania pomnożonej przez czynnik $(1+\theta)$. Przy założeniu, iż:

$w = 2, \quad q = 0.2, \quad \theta = 0.25$

podmiot ten wybierze kontrakt z udziałem własnym w wysokości:

(A) 1 (a więc nie ubezpieczy się)

(B) $\frac{23}{30}$

(C) $\frac{10}{15}$

(D) $\frac{7}{15}$

(E) 0

Zadanie 3.

Liczba zgłaszanych roszczeń ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami (r, q).
Przyjmijmy typowe oznaczenie: $p = 1 - q$.
Niezależnie od przebiegu procesu zgłaszania roszczeń, każde roszczenie z prawdopodobieństwem P jest oddalane, zaś z prawdopodobieństwem $Q = 1 - P$ jest uznawane. Decyzje oddalania/uznawania kolejnych roszczeń są także nawzajem niezależne. Rozkład liczby roszczeń uznanych jest:

(A) Ujemny dwumianowy $(r \cdot Q, \quad q)$

(B) Ujemny dwumianowy $\left(r, \quad \dfrac{qQ}{1-qQ}\right)$

(C) Ujemny dwumianowy $\left(r, \quad \dfrac{qQ}{1-qP}\right)$

(D) Ujemny dwumianowy $\left(r, \quad \dfrac{qQ}{p+Q}\right)$

(E) Nie jest to rozkład ujemny dwumianowy

Zadanie 4.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma postać:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$
gdzie:

- u - wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$ - łączna wartość szkód jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ,
- wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy
- składka c zawiera stosunkowy narzut bezpieczeństwa $\theta = 0.2$, co zapewnia iż prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu $\Psi(u)$ równe jest $\frac{1}{10}$.

Udziałowcy zwiększyli nadwyżkę początkową dwukrotnie - do wysokości $2 \cdot u$.
Zakładając, iż wszystkie pozostałe parametry procesu nie uległy zmianie, prawdopodobieństwo ruiny wyniesie teraz:

(A) 0.010

(B) 0.012

(C) 0.0144

(D) $\frac{1}{144}$

(E) za mało danych do udzielenia odpowiedzi liczbowej

Zadanie 5.
O rozkładzie pewnego ryzyka X posiadamy następujące informacje:

- znamy oczekiwaną wartość nadwyżki ponad 20:

$E\left[(X-20)_+\right]=8$

- oraz znamy następujące charakterystyki dotyczące przedziału $\left(10, 20\right]$:

$$\Pr(X \le 20) = \frac{3}{4}$$

$$\Pr(X \le 10) = \frac{1}{4}$$

$$E\left(X|10 < X \le 20\right) = 13$$

Wobec tego oczekiwana wartość nadwyżki ponad 10:

$$E\left[(X-10)_+\right],$$

wynosi:

(A) 12

(B) 12.5

(C) 13

(D) 13.5

(E) 14

Zadanie 6.
Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.
Wypłata odszkodowania za n-tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$.
Załóżmy, iż zmienne losowe $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ oraz $D_1, D_2, D_3, \dots$ są wszystkie nawzajem niezależne, przy czym:

- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1,
- $D_1, D_2, D_3, \dots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 2.

Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego n wypłata odszkodowania za szkodę $n+1$-szą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę n-tą wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{6}$

(E) $\frac{1}{8}$

Zadanie 7.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:
$U(t) = u + c \cdot t - N(t)$,
gdzie $N(t)$ jest procesem Poissona (*zwykłym, a nie złożonym*!) z parametrem częstotliwości λ.
Niech
$\Psi(u) = \Pr\left(U(t) < 0 \quad \textit{dla pewnego} \quad t > 0\right)$.
Wiemy, że dla dowolnego $u > 1$ zachodzi:
$\left(\frac{1}{2}\right)^{u+1} \leq \Psi(u) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{u}$.
Wobec tego składka *c* przypadająca na jednostkowy okres czasu wynosi:

(A) $\frac{e^{\lambda}}{\ln 2}$

(B) $\frac{1+\lambda}{\ln 2}$

(C) $\lambda \cdot e^{2}$

(D) $\lambda \cdot \ln 2$

(E) $\frac{\lambda}{\ln 2}$

Zadanie 8.
W pewnej niejednorodnej populacji ryzyk każde ryzyko generuje szkodę (co najwyżej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem q, natomiast rozkłady wartości szkody zależą od parametru ryzyka B, przyjmującego dla różnych ryzyk różne wartości. Warunkowa gęstość rozkładu wartości pojedynczej szkody Y przy danej wartości parametru ryzyka B dana jest na półosi dodatniej wzorem:
$f_{Y|B=\beta}(y) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot y}$,
natomiast rozkład parametru ryzyka w populacji ryzyk ma na półosi dodatniej gęstość:
$g_B(\beta) = \beta e^{-\beta}$.
Wobec tego prawdopodobieństwo (bezwarunkowe), iż wartość szkody losowo wybranej ze zbioru szkód, do których w ciągu roku z tej populacji dojdzie (o ile dojdzie do co najmniej jednej szkody), przekroczy 9, tzn.
$\Pr(Y > 9)$
wynosi:

(A) 0.001

(B) 0.005

(C) 0.010

(D) 0.020

(E) 0.033

Zadanie 9.
Proces zgłaszania szkód jest poissonowski, ze stałym w czasie natężeniem (powiedzmy, rzędu wielu tysięcy rocznie).
Dla każdej zgłaszanej szkody czas, jaki upływa od momentu jej zgłoszenia do momentu likwidacji, ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1 rok.
Wybieramy pewien moment czasu *t*. Ze zbioru wszystkich szkód, które w tym momencie oczekują na likwidację, wybieramy losowo jedną szkodę. Oznaczmy przez T_1 moment jej zgłoszenia, zaś przez T_2 moment jej likwidacji. Oczywiście zachodzi:
$T_1 < t < T_2$
Przyjmujemy, iż zmienne T_1 i T_2 są dobrze określone (pomijamy jako praktycznie nieprawdopodobne zdarzenie, iż w danym momencie zbiór szkód oczekujących na likwidację jest pusty).
$E(T_2 - T_1 | T_2 > t > T_1)$ wynosi:

(A) 1 rok

(B) $\frac{4}{3}$ roku

(C) $\frac{3}{2}$ roku

(D) $\frac{5}{3}$ roku

(E) 2 lata

Zadanie 10.
Niech przy danej wartości parametru θ łączna wartość szkód w portfelu liczącym n ryzyk:
$S(n) = Y_1 + \ldots + Y_{N(n)}$,
ma złożony rozkład Poissona o częstotliwości równej $n \cdot \lambda$ i rozkładzie pojedynczego składnika o parametrach:
$E(Y|\Theta = \theta) = \mu(\theta)$
$VAR(Y|\Theta = \theta) = (\mu(\theta))^2$.
Parametr θ rozkładu zmiennej Y pochodzi z rozkładu zmiennej losowej Θ, o którym wiemy, że:
$E(\mu(\Theta)) = \mu$
$VAR(\mu(\Theta)) = a^2$
Kwadrat współczynnika zmienności zmiennej $S(n)$, to znaczy iloraz:
$\dfrac{VAR(S(n))}{[E(S(n))]^2}$,
wynosi:

(A) $\dfrac{a^2 + \frac{2}{n \cdot \lambda} \cdot (\mu^2 + a^2)}{\mu^2}$

(B) $\dfrac{3 \cdot a^2 + 2 \cdot \mu^2}{\mu^2 \cdot n \cdot \lambda}$

(C) $\dfrac{a^2 + 2 \cdot \mu^2}{\mu^2 \cdot n \cdot \lambda}$

(D) $\dfrac{a^2 + \frac{1}{n \cdot \lambda} \cdot (\mu^2 + a^2)}{\mu^2}$

(E) $\dfrac{3 \cdot a^2 + 2 \cdot \mu^2}{\mu^2 \cdot n^2 \cdot \lambda^2}$

Wskazówka: zwróć uwagę, iż parametr ryzyka Θ realizuje się na tym samym poziomie dla całego portfela

Egzamin dla Aktuariuszy z 28 maja 2012 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....KLUCZ ODPOWIEDZI.................................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	D	
3	C	
4	B	
5	A	
6	B	
7	E	
8	C	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.