Zadanie 1.
W pewnej populacji każde ryzyko charakteryzuje się trzema parametrami q, b oraz v, o następującym znaczeniu:

- parametr q to prawdopodobieństwo, że do szkody dojdzie (może zajść co najwyżej jedna szkoda),
- jeśli już do szkody dojdzie, to rozkład jej wartości ma wartość oczekiwaną równą b i wariancję równą b^2v^2.

Parametr v^2 dla wszystkich ryzyk z populacji przyjmuje tę samą wartość równą $1/5$. Niejednorodność populacji znajduje wyraz w zróżnicowanych wartościach pozostałych dwóch parametrów. Wartości parametrów (q,b) losowo dobranego ryzyka z tej populacji to realizacja pary zmiennych losowych (Q,B), o której wiemy, że:

- $\mathrm{E}(Q) = 0.1$,
- $var(Q) = 0.01$,
- $var(B) = \frac{1}{4}[\mathrm{E}(B)]^2$,
- zmienne Q i B są niezależne.

Niech W_n oznacza łączną wartość szkód z portfela liczącego n ryzyk niezależnie wylosowanych z tej populacji. Liczba n, dla której zachodzi:

$$\frac{\sqrt{var(W_n)}}{\mathrm{E}(W_n)} = 0.1,$$

wynosi:

(A) 1400

(B) 1350

(C) 1300

(D) 1250

(E) 1200

Zadanie 2.
Pewien podmiot maksymalizuje wartość oczekiwaną funkcji użyteczności o postaci: $u(x) = -\exp(-x)$.
Tymczasem majątek tego podmiotu wynosi w, może on jednak zostać zredukowany o stratę w wysokości 1, co może nastąpić z prawdopodobieństwem q.
Od ryzyka tej straty można się na rynku ubezpieczyć. Rynek oferuje kontrakty z udziałem własnym ubezpieczonego, z parametrem $\alpha \in (0,1]$, takie że:

- składka za kontrakt wynosi $(1+\theta) \cdot q \cdot \alpha$,
- odszkodowanie w razie zajścia szkody wyniesie α

Jeśli założymy, że $\theta = 1/5$ zaś $q = 1/6$, wtedy podmiot, o którym mowa, osiągnie maksimum oczekiwanej użyteczności wybierając kontrakt z pokryciem równym (wybierz najlepsze przybliżenie):

(A) $\alpha \approx 69\%$

(B) $\alpha \approx 72\%$

(C) $\alpha \approx 75\%$

(D) $\alpha \approx 78\%$

(E) $\alpha \approx 81\%$

Zadanie 3.
Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poissona z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1), (λ_2, F_2), oraz (λ_3, F_3). Wartości parametrów częstotliwości to λ_1, λ_2, λ_3, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3, dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $1 \le x < 2$	$F_i(x)$ dla $x \ge 2$
1	2	0	0,2	1
2	1	0	0,4	1
3	1	0	0,8	1

Przy tych założeniach parametr a wzoru:
- $\Pr(X = 4) = a exp(-b)$

wynosi:

(A) $6\frac{1}{6}$

(B) $7\frac{5}{12}$

(C) $8\frac{2}{3}$

(D) $9\frac{11}{12}$

(E) $11\frac{1}{6}$

Zadanie 4.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową:

$U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0,1]) = 1$,
- $E(Y_1) = 1/5$.

Wiemy też, że $c > \frac{\lambda}{5}$.

Wobec tego wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) może przyjmować różne wartości. Przedział, który zawiera wszystkie te wartości (i nic ponadto) jest postaci:

(A) $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right]$

(B) $\left[\frac{1}{15}, \frac{1}{3}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{15}, \frac{1}{5}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right]$

(E) $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$

Zadanie 5.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 2.5, składka roczna wynosi 2, a łączne wartości szkód w kolejnych latach $W_1, W_2, W_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(W_1 = k) = 0.6(0.4)^{k-1}, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A) $\frac{8}{27}$

(B) $\frac{8\sqrt{2}}{27\sqrt{3}}$

(C) $\frac{16}{81}$

(D) $\frac{16\sqrt{2}}{81\sqrt{3}}$

(E) $\frac{32}{243}$

Zadanie 6.

W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, stopniowym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna $T_1 \in (0,1)$ oznaczająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany gęstością:

- $f_{T_1}(t) = \frac{\exp(0.1t)}{10(\exp(0.1)-1)}$

Niech T_2 oznacza odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1 (rok).

Zakładamy że zmienne losowe T_1 oraz T_2 są niezależne. Prawdopodobieństwo, iż szkoda, do której doszło w ciągu roku, pozostanie nie-zlikwidowana na koniec tego roku, z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 64%

(B) 67%

(C) 70%

(D) 73%

(E) 77%

Zadanie 7.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi 300, zaś pojedyncze szkody są niezależne od siebie i od procesu pojawienia się szkód, i mają rozkład dany na półosi dodatniej gęstością:
$$f(x) = \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{1}{8}x\right) + \frac{1}{48}\exp\left(-\frac{1}{16}x\right)$$
- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi 3600.

Wiadomo, że przy takich założeniach funkcja prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcja wysokości nadwyżki początkowej u) jest postaci:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u)$$

Suma parametrów tego wzoru $(a_1 + a_2)$ wynosi:

(A) $\frac{4}{5}$

(B) $\frac{5}{6}$

(C) $\frac{6}{7}$

(D) $\frac{7}{8}$

(E) $\frac{8}{9}$

Zadanie 8.
Rozważamy łączną wartość szkód z pewnego portfela ryzyk w roku ubiegłym:

- $X_0 = Y_1^0 + \cdots + Y_{N_0}^0$,

oraz w roku nadchodzącym:

- $X_1 = Y_1^1 + \cdots + Y_{N_1}^1$.

Wiemy, że N_0 i N_1 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona(λ). O zmiennych $Y_1^0, Y_1^1, Y_2^0, Y_2^1, Y_3^0, Y_3^1, \ldots$ wiemy, że są – przy danej wartości parametru ryzyka Θ – warunkowo niezależne, niezależne także od zmiennych N_0 i N_1, oraz mają identyczny (warunkowy) rozkład o momentach pierwszych dwóch rzędów danych wzorami:

- $\mathrm{E}(Y_1^0|\Theta) = \Theta$,
- $var(Y_1^0|\Theta) = \Theta^2 V_Y^2$.

Parametr ryzyka Θ jest zmienną losową. Przyjmijmy oznaczenia:

- $\mathrm{E}(\Theta) = \mu$
- $var(\Theta) = \mu^2 V_\Theta^2$.

Zakładamy, że znamy wartości parametrów $\lambda, \mu, V_Y^2, V_\Theta^2$, oraz iż zaobserwowaliśmy za rok ubiegły realizacje N_0 oraz X_0. Okazuje się, że najlepszy liniowy nieobciążony predyktor łącznej wartości szkód w roku nadchodzącym można uprościć do postaci:

- $BLUP(X_1|N_0, X_0) = \lambda\mu + a(X_0 - \mu N_0)$,

gdzie współczynnik a jest następującą funkcją znanych parametrów:

(A) $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1+V_\Theta^2)(1+V_Y^2)}$

(B) $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1+V_\Theta^2)(1+V_Y^2) - 1}$

(C) $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1+V_\Theta^2)(1+V_Y^2) - V_Y^2}$

(D) $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1+V_\Theta^2)(1+V_Y^2) - V_\Theta^2}$

(E) $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1+V_\Theta^2)(1+V_Y^2) - V_\Theta^2 V_Y^2}$

Zadanie 9.
Modelujemy przebiegający w czasie proces likwidacji szkód przez ubezpieczyciela. Niech T oznacza zmienną losową oznaczającą czas, jaki upływa od momentu zgłoszenia szkody do jej likwidacji. Niech:

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}, \quad t > 0,$$

oznacza natężenie procesu likwidacji (gęstość likwidacji tych szkód, które do momentu t pozostają jeszcze nie zlikwidowane). Występujące we wzorze symbole f_T, F_T, oraz h_T oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej T.
Załóżmy, że natężenie procesu likwidacji dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej następująco:

- $h_T(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

Wtedy wartość oczekiwana czasu likwidacji $\mathrm{E}(T)$ wynosi:

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 8

(E) $+\infty$

Zadanie 10.
W pewnym ubezpieczeniu szkody zawsze likwidowane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech $X_{t,0}$ oraz $X_{t,1}$ oznaczają łączną wartość szkód zaistniałych w roku *t*, a likwidowanych w tym samym roku oraz w roku następnym, odpowiednio. Mamy w dyspozycji próbkę obserwacji z lat $t = 1,2,...,n$:

- $X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}, X_{2,1},..., X_{n,0}, X_{n,1}$.

Zakładamy, że wszystkie powyższe zmienne są niezależne, i mają rozkłady Gamma o parametrach:

$X_{t,0} \sim \Gamma(\alpha_0, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$,

$X_{t,1} \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$.

Nie znamy wartości parametrów $(\alpha_0, \alpha_1, \beta)$, w istocie jednak interesuje nas jedynie parametr $\mu_1 := \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1}$

Rozważamy dwa estymatory tego parametru:

$$\hat{\mu}_1 := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \frac{X_{t,1}}{X_{t,0} + X_{t,1}}, \text{ oraz } \hat{\hat{\mu}}_1 := \frac{\sum_{t=1}^{n} X_{t,1}}{\sum_{t=1}^{n}(X_{t,0} + X_{t,1})}$$

Stosunek wariancji tych estymatorów:

$$\frac{\mathrm{var}(\hat{\mu}_1)}{\mathrm{var}(\hat{\hat{\mu}}_1)}$$

wynosi:

(A) $\dfrac{\alpha_0+\alpha_1+1}{\alpha_0+\alpha_1+n}$

(B) $\dfrac{\alpha_0+\alpha_1+\frac{1}{n}}{\alpha_0+\alpha_1+1}$

(C) $\dfrac{\alpha_0+\alpha_1+1}{\alpha_0+\alpha_1+\frac{1}{n}}$

(D) $\dfrac{\alpha_0+\alpha_1+n}{\alpha_0+\alpha_1+1}$

(E) 1

Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	E	
4	D	
5	C	
6	A	
7	E	
8	B	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.