

Zadanie 1.

Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależne i mają rozkład z atomami:

$$\Pr(X_1 = 0) = 0.3,$$

$$\Pr(X_1 = 1) = 0.1,$$

i gęstością: $f(x) = 0.6$ na przedziale $(0, 1)$.

Wobec tego $\Pr(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 1)$ wynosi:

(A) 0.2295

(B) 0.2403

(C) 0.2457

(D) 0.2511

(E) 0.2619

Zadanie 2.

Niech:

- Y będzie zmienną losową o rozkładzie Gamma $(\alpha, 1)$, z wartością oczekiwaną równą wariancji, równą α ;
- R będzie liczbą z przedziału $(0,1)$.

Wtedy:

$$\inf_{d>0} E\{\exp[R(Y-d)]|Y>d\}$$

wynosi:

(A) $\frac{1}{1-R}$ dla $\alpha > 1$, zaś $\left(\frac{1}{1-R}\right)^\alpha$ dla $\alpha \in (0,1)$

(B) $\left(\frac{1}{1-R}\right)^\alpha$ dla $\alpha > 1$, zaś $\frac{1}{1-R}$ dla $\alpha \in (0,1)$

(C) jeden dla dowolnych $\alpha > 0$

(D) $\frac{1}{1-R}$ dla dowolnych $\alpha > 0$

(E) $\left(\frac{1}{1-R}\right)^\alpha$ dla dowolnych $\alpha > 0$

Zadanie 3.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- T_1, T_2, \dots, T_N oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go, ..., N -tego (numeracja roszczeń od 1-go do N -tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Założmy, że:

- zmienne losowe N, T_1, T_2, T_3, \dots są niezależne,
- zmienne losowe T_1, T_2, T_3, \dots mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{z parametrem } c = \frac{1}{3}e.$$

Właśnie pojawiło się roszczenie, i okazało się, że jest to pierwsze roszczenie z wypadku o którym dotąd nie wiedzieliśmy, a który miał miejsce miesiąc temu. Jednym słowem, wiadomo, że zaszedł wypadek, wiemy więc, że N wyniosło co najmniej 1, i że najmniejsza liczba ze zbioru $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$, przyjęła wartość 1.

Wartość oczekiwana liczby roszczeń z tego wypadku, a więc:

$$E(N | \min\{T_1, T_2, \dots, T_N\} = 1)$$

wynosi:

- (A) e
- (B) $e - 1/2$
- (C) 2
- (D) $(e + 1)/2$
- (E) $3/2$

Zadanie 4.

Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka:

$$S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N,$$

jest zmienną losową o złożonym rozkładzie Poissona. Trzy niezależne podmioty pokrywają części S_1 , S_2 , oraz S_3 całkowitej wartości zmiennej S :

$$S_1 = \min\{d, Y_1\} + \min\{d, Y_2\} + \dots + \min\{d, Y_N\},$$

$$S_3 = \max\{0, Y_1 - M\} + \max\{0, Y_2 - M\} + \dots + \max\{0, Y_N - M\},$$

$$S_2 = S - S_1 - S_3,$$

gdzie parametry podziału odpowiedzialności spełniają warunki $M > d > 0$.

Jeśli przyjmiemy, że:

$$E(N) = 10,$$

$$d = 2,$$

$$M = 10,$$

oraz iż dystrybuanta rozkładu wartości pojedynczej szkody dana jest na półosi nieujemnej wzorem:

$$Pr(Y_1 \leq y) = 1 - \left(\frac{10}{10+y}\right)^3,$$

to $cov(S_1, S_3)$ wynosi:

- (A) 5
- (B) 7.5
- (C) 12.5
- (D) 20
- (E) 25

Zadanie 5.

O rozkładzie ryzyka X wiemy, że:

$$\Pr(X \in [0, 1]) = 1,$$

$$E(X) = 0.2,$$

$$\Pr(X \leq 0.3) = 0.5.$$

Rozważmy zbiór wszystkich możliwych (w świetle powyższych informacji) wartości wariancji zmiennej losowej X . Różnica pomiędzy kresem górnym a dolnym tego zbioru (rozpiętość przedziału niepewności dla wariancji) wynosi:

- (A) 0.05
- (B) 0.06
- (C) 0.07
- (D) 0.08
- (E) 0.09

Zadanie 6.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:

$$U(t) = u + (1 + \theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}, \text{ gdzie:}$$

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- Y_1, Y_2, Y_3, \dots to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \frac{\alpha v^\alpha}{(v + y)^{\alpha+1}}$.

Wiemy, że parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 2$, $v = 2$ oraz $\theta = \frac{1}{5}$.

Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$, a więc zdarzenia:

- $\exists T > 0$ takie, że $U(T) < 0$

jest funkcją nadwyżki początkowej u . Wiadomo, że dla odpowiednio dobranych parametrów a, b, c funkcja ta spełnia zależność:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u)(1 + au)^b = c$$

(A) $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, 2, 5\right)$

(B) $(a, b, c) = (1, 2, 5)$

(C) $(a, b, c) = (2, 2, 5)$

(D) $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, 1, 5\right)$

(E) $(a, b, c) = (2, 1, 5)$

Zadanie 7.

Rozważamy zdyskontowaną na moment początkowy wartość składek pomniejszoną o wartość szkód w klasycznym procesie nadwyżki ubezpieczyciela:

$$B(t) = c \frac{1 - \exp(-\delta t)}{\delta} - \sum_{k: T_k \leq t} \exp(-\delta T_k) Y_k, \text{ gdzie:}$$

- ct jest sumą składek które napłynęły do momentu t ,
- T_k, Y_k to moment wystąpienia i wartość bieżąca k -tej szkody
- $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ są niezależne
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 0.01
- Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają rozkład o momentach równych: $E(Y_1) = 1, E(Y_1^2) = 2$
- $\delta = 4\%$ to zakładana przy dyskontowaniu intensywność oprocentowania

Dobierz stałą c tak, aby współczynnik zmienności (odchylenie standardowe podzielone przez wartość oczekiwaną) zmiennej:

$$B(\infty) = \frac{c}{\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\delta T_k) Y_k$$

Wyniósł 1/2.

- (A) 102
- (B) $100 + 2\sqrt{2}$
- (C) 104
- (D) $100 + 4\sqrt{2}$
- (E) 108

Zadanie 8.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

$$\bullet \quad U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n,$$

gdzie zmienne W_1, W_2, W_3, \dots są niezależne i mają ten sam rozkład dany na odcinku $(0, 2)$ gęstością:

$$f_w(x) = \frac{15}{16} x^2 (2-x)^2$$

Jeśli parametry procesu wynoszą:

$$\bullet \quad u = 0, \quad c = 1$$

to prawdopodobieństwo ruiny w horyzoncie dwóch okresów czasu (a więc prawdopodobieństwo zdarzenia, iż $U_1 < 0$ lub $U_2 < 0$) wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{9}{16}$

(C) $\frac{5}{8}$

(D) $\frac{11}{16}$

(E) $\frac{3}{4}$

Zadanie 9.

W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód, które w ciągu t lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ jest procesem Poissona o intensywności λ (rocznie).

Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji wszystkich ubezpieczonych (tak naszych, jak i tych, którzy ubezpieczają się u konkurentów) dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$, gdzie $(\alpha, \beta) = (2, 5)$

Założmy, że w pierwszym roku tak nasza firma, jak i firmy konkurencyjne proponowały wszystkim ubezpieczenie w zamian za tę samą składkę. W drugim roku nasza firma kontynuuje praktykę z roku poprzedniego, natomiast konkurenci wprowadzili składki niższe od przeciętnej za bezszkodowy przebieg ubezpieczenia w pierwszym roku, zaś wyższe od przeciętnej odpowiednio dla ubezpieczonych, którzy mieli w pierwszym roku szkody. Zakładając, że wszyscy ubezpieczeni wybiorą tego ubezpieczyciela, który jest dla nich tańszy, oczekiwana częstotliwość szkód w drugim roku (w przeliczeniu na jednego ubezpieczonego) w naszej firmie wzrośnie w stosunku do pierwszego roku o:

- (A) ponad 40%
- (B) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 36% a 40%
- (C) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 33% a 36%
- (D) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 30% a 33%
- (E) mniej niż 30%

Zadanie 10.

Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych.

Oczywiście zachodzi $N = M + K$.

Wiadomo, że zmienne M oraz K są warunkowo (przy ustalonej wartości parametru ryzyka Λ) niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami odpowiednio:

- Λq - zmienna M ,
- Λp - zmienna K ,

gdzie $p = 1 - q$ to liczba z przedziału $(0, 1)$.

O parametrze ryzyka Λ wiadomo, że:

- ma on rozkład Gamma o wartości oczekiwanej $\frac{\alpha}{\beta}$ i wariancji $\frac{\alpha}{\beta^2}$

Oczekiwana liczba szkód zaszłych w ciągu roku pod warunkiem, że do końca roku zgłoszono m szkód, a więc:

$$E(N|M = m)$$

wynosi:

(A) $m + \frac{\alpha + mp}{\beta + q}$

(B) $m + \frac{\alpha + mp}{\beta q + q}$

(C) $m + \frac{\alpha p + mp}{\beta q + q}$

(D) $m + \frac{\alpha p + mp}{\beta + q}$

(E) $m + \frac{\alpha + m}{\beta + q}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 26 maja 2014 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	A	
3	E	
4	E	
5	B	
6	D	
7	C	
8	C	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.