Zadanie 1.
Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne i mają taki sam rozkład z atomami:

$$\Pr(X_1 = 0) = 6/10,$$
$$\Pr(X_1 = 1) = 1/10,$$

i gęstością: $f(x) = 3/10$ na przedziale $(0, 1)$.
Wobec tego $\Pr(X_1 + X_2 \leq 5/3)$ wynosi:

(A) 0.960

(B) 0.965

(C) 0.970

(D) 0.975

(E) 0.980

Zadanie 2.
Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w, i narażony jest na stratę X. Strata X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

- $\Pr(X = 1) = q$, $\Pr(X = 0) = 1 - q$

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:

- $u(x) = -\exp(-x)$.

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty ubezpieczeniowe wypłacające αX za szkodę w wysokości X dla dowolnych $\alpha \in (0,1]$, w zamian za składkę w wysokości $(1+\theta)\alpha \mathrm{E}(X)$.

Jeśli założymy, że $\theta = 25\%$, zaś $q = 20\%$, wtedy dla podmiotu, o którym mowa, optymalny poziom parametru α wynosi (wybierz najlepsze przybliżenie):

(A) 67%

(B) 71%

(C) 73%

(D) 76%

(E) 78%

Zadanie 3.
Niech T oznacza moment zajścia szkody, zaś $T + X$ moment jej likwidacji. Zakładamy, że moment zajścia szkody T jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, t_0)$, zaś okres czasu X, jaki upływa od zajścia do likwidacji szkody, jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 2. Zakładamy, że zmienne losowe T oraz X są niezależne.
Warunkową wartość oczekiwaną $\mathrm{E}(X|X + T > t_0)$ interpretujemy jako oczekiwany całkowity czas likwidacji takiej szkody, która w momencie czasu t_0 wciąż oczekuje na likwidację.
Granica $\lim_{t_0\to\infty} \mathrm{E}(X|X + T > t_0)$ wynosi:

(A) 2

(B) 5/2

(C) 3

(D) 7/2

(E) 4

Zadanie 4.
W pewnym ubezpieczeniu proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą 2, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$.

Ubezpieczony stosuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:
- Nie zgłasza szkód, dopóki nie zdarzy mu się szkoda o wartości przekraczającej ½
- Zgłasza pierwszą szkodę, która przekroczyła wartość ½, po czym zgłasza ewentualne następne szkody bez względu na to, jaka jest ich wartość.

Charakter ubezpieczenia jest przy tym taki, że decyzja o niezgłoszeniu danej szkody jest nieodwołalna – nie ma więc możliwości zgłoszenia danej szkody dopiero wtedy, kiedy zajdzie któraś z następnych szkód.

Oczekiwana liczba szkód zgłoszonych w ciągu roku z tego ubezpieczenia wynosi (z dobrym przybliżeniem):

(A) 1.37

(B) 1.30

(C) 1.23

(D) 1.17

(E) 1.11

Zadanie 5.
Warunkowy rozkład wartości szkód generowanych przez pojedyncze ryzyko z pewnej populacji przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ jest złożonym rozkładem Poissona:

- z oczekiwaną liczbą szkód równą λ, oraz
- z wartością oczekiwaną pojedynczej szkody równą $(10+\lambda)$

Rozkład parametru ryzyka Λ w populacji jest rozkładem Gamma o wartości oczekiwanej równej 3/10 oraz wariancji równej 3/100.
Losujemy z tej populacji (całkowicie przypadkowo) n ryzyk, które następnie generują N_n szkód o łącznej wartości S_n. Rozważmy zachowanie się zmiennej losowej S_n/N_n , określonej oczywiście o ile liczba szkód jest większa od zera.
Granica $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{S_n}{N_n}\middle|N_n>0\right)$ wynosi:

(A) 10.12

(B) $10\,\frac{3}{11}$

(C) 10.30

(D) $10\,\frac{4}{11}$

(E) 10.40

Zadanie 6.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 300$, zaś rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:

  $f_Y(x) = \frac{1}{12}\left[\exp(-x/4) + \exp(-x/8)\right]$

- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 2500$,

Wiadomo, że przy takich założeniach funkcja prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcja wysokości nadwyżki początkowej u) jest postaci:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u),$$

Suma parametrów tego wzoru $(a_1 + a_2)$ wynosi:

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

Zadanie 7.
Wiemy, że rozkład liczby szkód N określony na zbiorze $\{0,1,2,3,\ldots\}$ jest rozkładem niezdegenerowanym, a ciąg prawdopodobieństw tego rozkładu spełnia równanie rekurencyjne:

- $\Pr(N=n)=\left(a+\frac{b}{n}\right)\Pr(N=n-1), \quad n=1,2,3,\ldots.$

Wobec tego wariancja zmiennej losowej N dana jest wzorem:

(A) $\frac{b+a}{1-a}$

(B) $\frac{b}{1-a}$

(C) $\frac{b+a}{(1-a)^2}$

(D) $\frac{b}{(1-a)^2}$

(E) żaden z powyższych wzorów nie pokrywa wszystkich przypadków rozkładów niezdegenerowanych spełniających podane równanie rekurencyjne

Zadanie 8.
Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Jeśli kierowcę z tej populacji przypadkowo wylosujemy, to charakteryzującą go wartość parametru q traktujemy jako realizację zmiennej losowej Q. Populacja jest niejednorodna, w związku z czym $var(Q) > 0$.

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 3-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Ląduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej lub trzeciej.

Na podstawie obserwacji ustaliliśmy, że frakcja kierowców z tej populacji przebywających w klasie pierwszej wynosi 20%, w klasie drugiej 8%, zaś w klasie trzeciej 72%. Oczywiście pominęliśmy przy tym obserwacje z pierwszych paru lat funkcjonowania systemu bonus-malus, kiedy przynależność do klasy zależała jeszcze od klasy startowej.
Jeśli przyjmiemy, że nasze oceny 20%, 8% oraz 72% nie są obarczone błędem, to wynika z tego, że $var(Q)$ wynosi:

(A) 0.08

(B) 0.07

(C) 0.06

(D) 0.05

(E) 0.04

Zadanie 9.

Modelujemy przebiegający w czasie proces ściągania należności regresowych przez ubezpieczyciela. Niech T oznacza zmienną losową o rozkładzie:

- ciągłym na przedziale $(0,+\infty)$
- z pewną masą prawdopodobieństwa w punkcie $+\infty$,

reprezentującą czas ściągnięcia należności regresowej (liczony od momentu powstania prawa do regresu). Niech f_T, F_T oraz h_T oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej T. Dystrybuancie oraz funkcji hazardu nadajemy następującą interpretację:

- $F_T(t) = \int_0^t f_T(s)ds$ to wskaźnik ściągalności do czasu t (oczywiście $F_T(0) = 0$)
- $\lim_{t \to \infty} F_T(t) = \Pr(T < \infty)$ to wskaźnik ściągalności ostatecznej,
- $h_T(t) = \dfrac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$ dla $t > 0$ to natężenie procesu ściągania (gęstość ściągania należności, które do momentu t pozostają jeszcze nie ściągnięte)

Załóżmy, że natężenie procesu ściągania dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej następująco:

- $h_T(t) = \dfrac{2}{2 + \exp(t)}$.

Wtedy wskaźnik ściągalności ostatecznej wynosi:

(A) 1

(B) 3/4

(C) 2/3

(D) 1/2

(E) 1/3

Zadanie 10.
Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku,
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych,
- Zachodzi oczywiście $N = M + K$.

Liczba szkód zgłoszonych przed końcem roku:

- $M = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N$,

jest sumą składników, z których każdy przyjmuje wartość jeden gdy daną szkodę zgłoszono w ciągu roku, zaś zero, gdy zgłoszenie nastąpiło później. Przyjmujemy, że zmienne losowe $N, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ są niezależne, oraz iż $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ mają taki sam rozkład:

- $\Pr(Z_1 = 1) = 1/4, \quad \Pr(Z_1 = 0) = 3/4.$

Jeśli teraz założymy, że liczba szkód zaszłych w ciągu roku ma rozkład ujemny dwumianowy o postaci:

- $\Pr(N = n) = (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^n, \ \ n = 0,1,2,\ldots,$

to prawdopodobieństwo warunkowe $Pr(K = 1|M = 1)$ wyniesie:

(A) 9/128

(B) 9/64

(C) 27/128

(D) 81/256

(E) 81/128

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 grudnia 2014 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I...........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	B	
3	E	
4	A	
5	E	
6	D	
7	C	
8	A	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.