Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LI Egzamin dla Aktuariuszy z 30 listopada 2009 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważamy polisę emerytalną dla (x). Polega ona na tym, że przez następne m lat będzie on płacił co rok składkę netto P. Po dożyciu wieku $x+m$ zacznie otrzymywać emeryturę w postaci renty dożywotniej w stałej wysokości 1 zł (na początku każdego roku). Gdy umrze przed osiągnięciem wieku $x+m$ nic nie będzie wypłacone. Niech L oznacza stratę ubezpieczyciela netto na moment wystawienia polisy.
Wówczas zdarzenie $\{L<0\}$ opisuje poprawnie formuła

(A)

$v^{K+1} > 1-(P+1)(1-v^m)$

(B)

$v^{K+1} > 1-(P+d)(1-v^m)$

(C)

$v^{K+1} > 1-P(1-v^m)$

(D)

$v^{K+1} > 1-(P-d)(1-v^m)$

(E)

$v^{K+1} > 1-(P+i)(1-v^m)$

2. Niech $\bar{A}^{1}_{x:\overline{m}|}(\delta)$ oznacza składkę $\bar{A}^{1}_{x:\overline{m}|}$ obliczoną z użyciem technicznej intensywności oprocentowania $\delta > 0$. Obliczyć $\Delta\delta$ które spełnia równanie

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{m}|}(\delta) = \bar{A}^{1}_{x+\frac{1}{12}:\overline{m+\frac{1}{12}}|}(\delta + \Delta\delta)$$

jeżeli dane są wartości:

$\bar{A}^{1}_{x:\overline{m}|} = 0{,}131763$, $A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1} = 0{,}0768021$, $(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{m}|} = 3{,}0173$, $\mu_x = 0{,}002$, $\mu_{x+m} = 0{,}05$, $\delta = \ln(1{,}05) = 0{,}04879$

(obliczone przy podanej wartości δ).

Wybrać wartość najbliższą.

(A)

0,00004

(B)

0,00014

(C)

0,00024

(D)

0,00034

(E)

0,00044.

3. Niech P_x oznacza tradycyjnie regularną coroczną składkę płatną aż do śmierci za ubezpieczenie osoby w wieku x, które wypłaci 1 zł na koniec roku śmierci. Załóżmy, że x jest liczbą całkowitą a $u \in (0,1)$. Przy założeniu UDD składka P_{x+u} wyraża się przez składki P_x oraz P_{x+1} następująco:

$$P_{x+u} = w_x \cdot P_x + w_{x+1} \cdot P_{x+1}$$

gdzie $w_{x+1} = 1 - w_x$ oraz

(A)

$$w_x = \frac{(1-u)P_{x+1}}{(1-u)P_{x+1} + (u - uq_x)P_x}$$

(B)

$$w_x = \frac{(1-u)(P_{x+1} + d)}{(1-u)(P_{x+1} + d) + (u - uq_x)(P_x + d)}$$

(C)

$$w_x = \frac{(1-u)(P_x + d)}{(1-u)(P_x + d) + (u - uq_x)(P_{x+1} + d)}$$

(D)

$$w_x = \frac{(1-du)(P_{x+1} + d)}{(1-du)(P_{x+1} + d) + (du - uq_x)(P_x + d)}$$

(E)

$$w_x = \frac{(1-u)P_x}{(1-u)P_x + (u - uq_x)P_{x+1}}$$

4. Rozważamy ubezpieczenie na życie ciągłe dla (35). Wypłaci ono 1 zł w chwili śmierci. Natomiast składka netto będzie płacona w postaci renty dożywotniej ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością.
Obliczyć $\pi^s(10)$ tzn. intensywność oszczędnościowej części składki po 10 latach.
Dane są:

$$i = 5\%,\ M_{35} = 3776,\ D_{35} = 17236,\ M_{45} = 3181,\ D_{45} = 10091,\ p_{45} = 0{,}992.$$

Uwaga! Należy skorzystać z założenia UDD.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 0,004

(B) 0,005

(C) 0,006

(D) 0,007

(E) 0,008.

5. Rozważamy rodzinę polis emerytalnych dla (x) parametryzowaną długością okresu płacenia składek $m > 0$. Dokładniej: polisa Pol(m) polega na tym, że przez najbliższe m lat ubezpieczony (x) będzie płacił składkę netto w postaci renty życiowej m-letniej ciągłej z odpowiednio dobraną stałą intensywnością netto; po dożyciu wieku $x + m$ zacznie otrzymywać emeryturę w postaci renty dożywotniej ciągłej z roczną intensywnością 1. Niech $0 < t < m$ oraz niech $V(t)$ oznacza rezerwę składek netto po t latach.

Wówczas $\frac{\partial V(t)}{\partial m}$ wyraża się wzorem:

(A) $\frac{\partial V(t)}{\partial m} = -A_{x:\overline{t}|}^{\;\;1} \cdot \frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}^2_{x:\overline{m}|}}$

(B) $\frac{\partial V(t)}{\partial m} = -A_{x+t:\overline{m-t}|}^{\;\;\;\;\;\;1} \cdot \frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}^2_{x:\overline{m}|}}$

(C) $\frac{\partial V(t)}{\partial m} = -A_{x+t:\overline{m-t}|}^{\;\;\;\;\;\;1} \cdot \frac{\bar{a}_x \bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}^2_{x:\overline{m}|}}$

(D) $\frac{\partial V(t)}{\partial m} = -A_{x+t:\overline{m-t}|}^{\;\;\;\;\;\;1} \cdot \frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}}$

(E) $\frac{\partial V(t)}{\partial m} = -A_{x:\overline{t}|}^{\;\;1} \cdot \frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}}$

6. Rozważmy grupę 100 osób w wieku (50). Każda z tych osób ubezpieczyła się kilka lub kilkanaście lat temu na życie i płaci regularne coroczne składki netto aż do śmierci (bieżący staż każdej z tych osób w ubezpieczeniu jest liczbą całkowitą). Obliczyć przeciętną liczbę polis, które nie przyniosą ubezpieczycielowi straty netto. Zakładamy, że wszystkie te osoby należą do tej samej populacji i że ich życia są niezależne. Można skorzystać z następujących danych:

$A_{50} = 0{,}37$, $i = 5\%$,

$l_{30} = 96172,\ l_{40} = 93348,\ l_{50} = 86752,$

$l_{60} = 73602,\ l_{70} = 51989,\ l_{80} = 24644,\ l_{90} = 4568.$

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 60

(B) 61

(C) 62

(D) 63

(E) 64.

7. Żona (20) jest wybrana z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 100; natomiast mąż (25) jest wybrany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 90. Rozpatrujemy następującą polisę emerytalną dla tej pary. Przez najbliższe 40 lat będą płacić składki w postaci renty życiowej ciągłej, przy czym płacenie składek ustaje po pierwszej śmierci (jeśli ktoś umrze w ciągu najbliższych 40 lat). Po 40 latach zaczyna się wypłata emerytury w postaci renty życiowej ciągłej płacącej do drugiej śmierci z roczną intensywnością 1.
Obliczyć intensywność $\bar{P}$ renty składek przyjmując techniczną intensywność oprocentowania na poziomie $\delta = 0{,}02$.

Wybierz wartość najbliższą.

(A) $0{,}26$

(B) $0{,}28$

(C) $0{,}30$

(D) $0{,}32$

(E) $0{,}34$.

8. On (y) jest wylosowany z populacji Gompertza a ona (x) z populacji Weibulla. Dane są:

$e_{x:y} = 7$, $\mu_x = 0{,}02$, oraz $\Pr\big(T(x) < T(y)\big) = 0{,}25$.

Obliczyć przybliżoną wartość

$e_{x+\frac{1}{12}:y}$

(A) 6,95

(B) 6,96

(C) 6,97

(D) 6,98

(E) 6,99.

9. Rozważamy ubezpieczenie 30-letnie malejące dla (20) wybranego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 100. Suma ubezpieczenia $c(t)$ wypłacana jest w chwili śmierci i wynosi:

$$c(t) = \begin{cases} (30 - t + ft)/30 & dla\ t < 30, \\ 0 & dla\ t \geq 30. \end{cases}$$

gdzie $f \in (0,1)$ jest parametrem. Składka opłacana jest w postaci renty życiowej ciągłej 30-letniej z odpowiednio dobraną intensywnością netto. Znaleźć najmniejsze f, które spełnia warunek:

dla każdego $t \in (0,30)$ *zachodzi nierówność* $V(t) \geq 0$.

Symbol $V(t)$ oznacza rezerwę składek netto po t latach.

(A) 0,605

(B) 0,615

(C) 0,625

(D) 0,635

(E) 0,645.

10. Rozważamy dwie populacje. Niech $g_j(x)$ oznacza gęstość rozkładu trwania życia noworodka wylosowanego z populacji j ($j = 1{,}2$.) Między funkcjami $g_1(x)$ oraz $g_2(x)$ zachodzi związek:

$$g_2(x) = \begin{cases} 0{,}9 g_1(x), & x < 50, \\ 1{,}1 g_1(x), & x > 50. \end{cases}$$

Niech dalej zmienna losowa X_j oznacza długość życia noworodka wylosowanego z populacji j. Wówczas $E(\min(X_1, 50))$ wyraża się wzorem:

(A) $E(\min(X_1, 50)) = 5E(X_1) - 5E(X_2) + 20.$

(B) $E(\min(X_1, 50)) = 5E(X_1) - 5E(X_2) + 25.$

(C) $E(\min(X_1, 50)) = 5{,}5E(X_1) - 5E(X_2) + 20.$

(D) $E(\min(X_1, 50)) = 5{,}5E(X_1) - 5{,}5E(X_2) + 25.$

(E) $E(\min(X_1, 50)) = 5{,}5E(X_1) - 5E(X_2) + 25.$

LI Egzamin dla Aktuariuszy z 30 listopada 2009 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	B	
4	D	
5	C	
6	A	
7	B	
8	E	
9	C	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.