

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 2011 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 3 października 2011 r.

1. Rozważamy populację Gompertza z funkcją intensywności śmiertelności postaci $\mu_{x+t} = B 1,05^{x+t}$. Niech przedział wiekowy $[x, x+10]$ charakteryzuje się tym, że największe jest w nim prawdopodobieństwo śmierci noworodka (spośród wszystkich przedziałów 10-letnich). Oblicz ${}_{10}P_x$.

(A) 0,52
(E) 0,64

(B) 0,55

(C) 0,58

(D) 0,61

2. Rozważmy następującą polisę emerytalną dla (25) wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 100. Przez najbliższe 40 lat będzie płacił składkę w formie renty życiowej ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością netto \bar{P} . Jeśli umrze w ciągu najbliższych 40 lat, uposażonym zostanie wypłacona suma ubezpieczenia 100 000 w chwili śmierci. Jeśli natomiast dożyje do wieku 65 lat to zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią w postaci renty życiowej z intensywnością 12 000 na rok. Dodatkowo, jeżeli umrze w wieku 65+t, gdzie $0 \leq t \leq 10$, to uposażeni otrzymają jednorazowo 100 000 $(10 - t)$ (w chwili jego śmierci).

Oblicz \bar{P} , jeśli wiadomo, że techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0,04$. Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 3 020 (B) 3 070 (C) 3 120 (D) 3 170
(E) 3 220

3. Rozpatrujemy ciągły model bezterminowego ubezpieczenia rentowego dla (x) , które w ciągu pierwszych 10 lat osoba żyjąca może odwołać w dowolnym momencie $0 < t < 10$, pobierając wypłatę \bar{a}_{x+t} za każdą złotówkę renty. Wiadomo, że wszyscy, którzy odwołują ubezpieczenie, czynią to tuż przed śmiercią, oraz że tylko połowa umierających zdąża odwołać ubezpieczenie. Podaj wysokość jednorazowej składki netto za 1 złotówkę renty, jeśli jest to populacja wykładnicza z parametrem $\mu = 0,04$, a oprocentowanie $\delta = 0,06$.

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 11,265 (B) 11,290 (C) 11,315 (D) 11,340
(E) 11,365

4. Niech $\bar{a}_x(\delta)$ oznacza wartość ciągłej renty życiowej wyznaczonej przy intensywności oprocentowania δ . Dla pewnej populacji wiadomo, że $\bar{a}_x(0,03) = 11,50$. Spośród niżej podanych wskaż najniższą wartość, której na pewno nie przekroczy $\bar{a}_x(0,04)$.

- (A) 10,77 (B) 10,78 (C) 10,79 (D) 10,80
(E) 10,81

5. Rozważamy ubezpieczenie spłaty n -letniego kredytu hipotecznego w wysokości 1, który będzie spłacany przez (x) w postaci renty ciągłej n -letniej z odpowiednio dobraną stałą intensywnością (model ciągły metody równych rat). Gdy dłużnik umrze w ciągu n lat, niespłacone saldo kredytu zostanie wypłacone natychmiast bankowi. Niech $SJN(n)$ oznacza składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie. Intensywność oprocentowania kredytu jest równa technicznej intensywności oprocentowania używanej przez ubezpieczyciela w rachunku technicznym. Pochodna $SJN'(n)$ wyraża się wzorem:

$$(A) \quad SJN'(n) = \frac{e^{\delta n}}{(e^{\delta n} - 1)^2} (\mu_{x+n} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{-1})$$

$$(B) \quad SJN'(n) = \frac{e^{\delta n}}{(e^{\delta n} - 1)^2} ({}_nq_x - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{-1})$$

$$(C) \quad SJN'(n) = \frac{\delta e^{\delta n}}{(e^{\delta n} - 1)^2} (\mu_{x+n} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{-1})$$

$$(D) \quad SJN'(n) = \frac{2\delta e^{\delta n}}{(e^{\delta n} - 1)^2} ({}_nq_x - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{-1})$$

$$(E) \quad SJN'(n) = \frac{\delta e^{\delta n}}{(e^{\delta n} - 1)^2} ({}_nq_x - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{-1})$$

6. Dla osoby w wieku (x) dostępne są 4 warianty ubezpieczenia, wszystkie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł, która w przypadku śmierci jest wypłacana na koniec roku śmierci. Są to:

- (1) 10-letnie ubezpieczenie na życie z jednorazową składką netto 22 395 zł;
- (2) 10-letnie ubezpieczenie na życie z roczną składką netto płatną przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku, w wysokości 3 110 zł;
- (3) 10-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie z roczną składką netto płatną przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku, w wysokości 9 120 zł;
- (4) bezterminowe ubezpieczenie na życie z roczną składką netto płatną przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku, w wysokości 4635 zł.

(x) wybiera czwarty wariant ubezpieczenia. Podaj wysokość rezerwy składek netto po 10 latach tego ubezpieczenia.

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 24 975 (B) 25 075 (C) 25 175 (D) 25 275
(E) 25 375

7. Rozważamy model ciągły bezterminowego ubezpieczenia na życie dla (x) , które wypłaci uposażonym sumę ubezpieczenia 1 w chwili śmierci ubezpieczonego, a wcześniej będzie opłacane w postaci ciągłej, życiowej renty składek z odpowiednio dobraną intensywnością netto \bar{P}_x . Wówczas spełnione jest równanie różniczkowe:

$$(A) \quad \frac{\partial {}_tV_x}{\partial x} - \frac{\partial {}_tV_x}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial x} \cdot \bar{a}_{x+t} = 0$$

$$(B) \quad \frac{\partial {}_tV_x}{\partial x} + \frac{\partial {}_tV_x}{\partial t} - \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial x} \cdot \bar{a}_{x+t} = 0$$

$$(C) \quad \frac{\partial {}_tV_x}{\partial x} - \frac{\partial {}_tV_x}{\partial t} - \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial x} \cdot \bar{a}_{x+t} = 0$$

$$(D) \quad \frac{\partial {}_tV_x}{\partial x} + \frac{\partial {}_tV_x}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial x} \cdot \bar{a}_{x+t} = 0$$

- (E) żadne z powyższych równań nie jest uniwersalnie prawdziwe.

8. Rozpatrujemy ciągły model dodatkowego ubezpieczenia od ciężkich chorób (*critical illness cover*), które wypłaca świadczenie, jeśli w ciągu 10 lat zostanie zdiagnozowana ubezpieczona choroba. Polisa wypłaca 50 000 zł w momencie zdiagnozowania choroby oraz dwie dalsze wypłaty po 50 000 zł w odstępach półrocznych, pod warunkiem przeżycia. Następujące oznaczenia identyfikują możliwe stany ubezpieczonego:

- a aktywny, zdrowy,
- i zdiagnozowana choroba,
- $d(D)$ śmierć wywołana zdiagnozowaną chorobą,
- $d(O)$ śmierć z innych przyczyn.

Niech y oznacza osiągnięty wiek, r oznacza czas, który upłynął od postawienia diagnozy. Dane są intensywności:

$$\mu_y^{a i} = 0,02 \quad \mu_y^{a d(O)} = 0,04 \quad \mu_{y,r}^{i d(O)} = 0,05 \quad \mu_{y,r}^{i d(D)} = 0,25$$

oraz intensywność oprocentowania $\delta = 0,05$.

Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie. Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 15 010 (B) 15 220 (C) 15 430 (D) 15 640
(E) 15 850

9. Bolek (b) i Lolek (l) są wylosowani niezależnie z dwóch populacji wykładniczych, przy czym $E(T(b))/E(T(l)) = 2$. Ponadto wiadomo, że $E(\min(T(b), n)) = 50,3415$
 $E(\min(T(l), n)) = 37,6702$.

Oblicz $E(\min(T(b), T(l), n))$. Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 29,25 (B) 30,25 (C) 31,25 (D) 32,25
(E) 33,25

10. Osoba (x) wychodzi z OFE z kapitałem K i kupuje dożywotnią emeryturę z gwarantowanym okresem wypłat n . Gwarantowany okres jest dobrany tak, by suma wypłat (bez oprocentowania) osiągnęła co najmniej $2/3$ kapitału K . Przyjmij ciągły model wypłat emerytalnych. Podaj w miesiącach długość okresu gwarancyjnego, jeżeli emeryt pochodzi z populacji o wykładniczym czasie trwania życia z $\mu = 0,09$, a oprocentowanie wynosi $\delta = 0,01$.
Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 92 (B) 94 (C) 96 (D) 98
(E) 100

LVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 2011 r.**Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :Klucz odpowiedzi.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	D	
2	E	
3	A	
4	B	
5	E	
6	E	
7	A	
8	C	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.