Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 29 września 2014 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 29 września 2014 r.

1. W populacji *P1* śmiertelnością rządzi prawo de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega > 0$. W populacji *P2* funkcja intensywności śmiertelności ma postać

$$\mu_x^{(2)} = \frac{n}{100-x} \text{ dla } x < 100,$$

gdzie $n > 0$ jest danym parametrem. Niech zmienna losowa X_i oznacza długość życia noworodka wylosowanego z populacji *Pi* (dla *i*=1,2). Wiadomo, że

$$E(X_1) = E(X_2), \text{ oraz}$$
$$Var(X_1) = \frac{4}{9} Var(X_2).$$

Oblicz parametr n.

(A) *n*=4 (B) *n*=5 (C) *n*=6 (D) *n*=7
(E) *n*=8

2. Osoba w wieku 30 lat rozważa kupno ubezpieczenia rentowego, wypłacającego świadczenia przez 20 lat od osiągnięcia 65 lat. Dwa warianty tego ubezpieczenia umożliwiają wybór między (1) rentą roczną wypłacającą 12 000 zł na początku kolejnego roku wypłaty świadczeń lub (2) renty miesięcznej z wypłatą 1000 zł na początku kolejnego miesiąca wypłaty świadczeń. W obydwu przypadkach płacona jest roczna składka netto, na początku roku składkowego, w wysokości 906 zł dla renty (1) lub 864 zł dla renty (2).

Zakładając, że parametry aktuarialne nie ulegną zmianie, podaj ile będzie musiała zapłacić osoba, która kupi rentę (1) za jednorazową składkę netto dopiero w wieku 65 lat. Dane są: $i = 5\%$ $\quad {}_{20}p_{65} = 0{,}197.$

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 104 320 (B) 107 820 (C) 111 320 (D) 114 820
(E) 118 320

3. Rozpatrujemy ciągły model ubezpieczenia dla osoby (50) z populacji o wykładniczym rozkładzie czasu życia z parametrem $\mu = 0{,}025$. W momencie śmierci ubezpieczonego polisa zaczyna wypłacać uposażonym ciągłą rentę $1000 \cdot (\bar{D}\bar{a})_{\overline{\mathring{e}_{50+t}|}}$ aż do momentu jej wyczerpania. Oblicz jednorazową składkę netto w tym ubezpieczeniu dla $\delta = 0{,}04$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 192 765 (B) 193 115 (C) 193 465 (D) 193 815
(E) 194 165

4. Za tę samą składkę jednorazową netto *SJN* można kupić jedną z następujących polis emerytalnych dla (65)

- E1 wypłaca na początku każdego roku $E > 0$, aż do śmierci, przy czym wypłat będzie co najmniej 10 (nawet, gdy umrze przed wiekiem 74);
- E2 wypłaca E na początku każdego roku, aż do śmierci lub do dożycia wieku 75 (w zależności od tego co nastąpi wcześniej); począwszy od wieku 75 wypłaca $E + \Delta E$, aż do śmierci (ΔE ma charakter *dodatku pielęgnacyjnego*).

Oblicz $\Delta E/E$ jeśli dane są:

$$i = 5\%, \qquad D_{65} = 2676{,}52\,; \; N_{65} = 24896{,}14\,; \; N_{75} = 6543{,}13$$

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 0,50 (B) 0,51 (C) 0,52 (D) 0,53
(E) 0,54

5. (*x*), wylosowany z populacji wykładniczej z parametrem $\mu > 0$, przez najbliższe $\frac{1}{2\mu}$ lat będzie płacił składkę emerytalną z intensywnością netto $\bar{P}$, a po dożyciu wieku $x + \frac{1}{2\mu}$ zacznie otrzymywać emeryturę w postaci renty życiowej ciągłej z intensywnością 1 . Ponadto, w przypadku śmierci w wieku $x + t$, gdzie $0 < t < \frac{1}{2\mu}$ uposażeni otrzymają jednorazowe świadczenie w wysokości $\frac{1}{2}\ \bar{V}(t)$, gdzie $\bar{V}(t)$ oznacza rezerwę składek netto na moment t .

Oblicz $\bar{P}$, jeśli techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 3\mu$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 0,182 (B) 0,184 (C) 0,186 (D) 0,188
(E) 0,190

6. Rozważamy 40-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla (30) wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Wypłaci ono 1 w chwili śmierci, jeśli ubezpieczony umrze w ciągu najbliższych 40 lat, lub na jego 70-te urodziny. Oblicz

$$\frac{\pi^r(20)}{\pi^s(20)}$$

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0{,}04$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 1,46 (B) 1,49 (C) 1,52 (D) 1,55
(E) 1,58

7. Rozpatrujemy dyskretny typ terminowego ubezpieczenia na życie i dożycie ze składką brutto płatną przez cały okres ubezpieczenia w stałej wysokości. Warianty tego ubezpieczenia różnią się okresem ubezpieczenia. We wszystkich przypadkach stosowane są te same parametry aktuarialne do kalkulacji składek i rezerw.

Niech symbol ${}_{k}V^{\alpha}_{x:\overline{n}|}$ oznacza rezerwę Zillmera na koszty początkowe po *k* latach ubezpieczenia zawartego na *n* lat; symbol $P^{\alpha}_{x:\overline{n}|}$ oznacza narzut na koszty początkowe w składce brutto ubezpieczenia zawartego na *n* lat; symbol $P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ oznacza roczną składkę netto w *n*-letnim ubezpieczeniu na dożycie. Wszystkie symbole odnoszą się do jednostkowej sumy ubezpieczenia.

Dane są: ${}_{10}V^{\alpha}_{x:\overline{40}|} = -0{,}03031$ $P^{\alpha}_{x:\overline{40}|} = 0{,}002477$ $P^{\alpha}_{x:\overline{20}|} = 0{,}003015$

$P_{x:\overset{1}{\overline{10}|}} = 0{,}06895$

Oblicz $1000 \cdot {}_{10}V^{\alpha}_{x:\overline{20}|}$. Wskaż najbliższą wartość

(A) -21,90 (B) -22,05 (C) -22,20 (D) -22,35
(E) -22,50

8. Okres zatrudnienia trwa od 25 do 65 roku życia. Pracownicy z populacji wykładniczej ze śmiertelnością $\mu^{(s)} = 0{,}025$ są narażeni w okresie zatrudnienia na ryzyko wypadku przy pracy ze stałą intensywnością $\mu^{(w)} = 0{,}02$. Konsekwencją wypadku jest trwały (do końca życia) wzrost intensywności śmiertelności do poziomu $\mu^{(ws)} = 0{,}06$. Kolejne wypadki już nie zmieniają ryzyka śmierci. Przed 65 rokiem życia jedyną przyczyną odejścia z pracy jest śmierć.

Zatrudniając nowych pracowników w wieku 25 lat, pracodawca wykupuje im bezterminowe ubezpieczenie na życie. Wyznacz jednorazową składkę netto za 1000 zł sumy ubezpieczenia, jeśli intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0{,}05$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 371 (B) 373 (C) 375 (D) 377
(E) 379

9. Rozważamy emeryturę małżeńską dla niej (x) i dla niego (y), która została zakupiona za składkę jednorazową netto SJN, i natychmiast zaczyna wypłacać

- z intensywnością $2A$, póki żyją oboje;
- z intensywnością A owdowiałej osobie, aż do jej śmierci.

Oboje wylosowani są niezależnie z populacji wykładniczej z parametrem $\mu = 0{,}01$. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wartość obecna świadczeń na moment wystawienia polisy przekroczy połowę SJN. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0{,}01$.

(A) 0,863 (B) 0,867 (C) 0,871 (D) 0,875
(E) 0,879

10. Plan emerytalny składa się z części (1) typu *contribution-defined* oraz z części (2) *benefit-defined*. W pierwszej części płacona jest składka w wysokości 8% wynagrodzenia. Druga część dopełnia łączną emeryturę do 65% płacy finalnej, czyli płacy z ostatniego roku zatrudnienia.

Rozważ 50-letniego uczestnika planu (urodzonego 1 stycznia) z roczną płacą rosnącą o 4% na początku każdego roku i wynoszącą obecnie (po tegorocznej podwyżce) 60 000 zł oraz z kapitałem w planie (1) w wysokości 94 000. Przyjmij, że składka jest płacona raz w roku, w połowie roku. Zakładając przejście na emeryturę w wieku 67 lat, podaj udział emerytury z pierwszej części planu w całej emeryturze. Dane są:

$i = 3\%$ $\qquad\qquad \ddot{a}_{65}^{(12)} = 9{,}5$

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 43,1% (B) 43,5% (C) 43,9% (D) 44,3%
(E) 44,7%

LXVII Egzamin dla Aktuariuszy z 29 września 2014 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....Klucz odpowiedzi..............................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	C	
3	A	
4	B	
5	B	
6	E	
7	E	
8	D	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.