Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ będą zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie ujemnym dwumianowym

$P_\theta(X_i = k) = (k+1)\theta^2(1-\theta)^k, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,n+1,$

gdzie $\theta \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ są warunkowo niezależne przy danym θ. Załóżmy, że rozkład a priori parametru θ jest rozkładem o gęstości

$\pi(\theta) = 12\theta^2(1-\theta)$ gdy $\theta \in (0,1)$.

Na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ wyznaczamy predyktor bayesowski zmiennej X_{n+1} przy kwadratowej funkcji straty. Wariancja tego predyktora jest równa

(A) $\frac{4n}{(n+1)^2}$

(B) $\frac{16n}{(n+1)^2}$

(C) $\frac{n}{(n+1)^2}$

(D) $\frac{8n}{(n+1)}$

(E) $\frac{8n}{(n+1)^2}$

Zadanie 2.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^\theta}{(\lambda + x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta, \lambda > 0$ są nieznanymi parametrami. Rozważamy estymatory największej wiarogodności $\hat{\theta}_n, \hat{\lambda}_n$ parametrów θ i λ. Chcemy dobrać stałą t tak, aby przy n dążącym do nieskończoności prawdopodobieństwo zdarzenia $\left|\hat{\theta}_n - \theta\right|\sqrt{n} > t$ było równe 0,1.
Jeżeli $\theta = 3$ i $\lambda = 1$, to stała t jest równa

(A) 19,7

(B) 14,8

(C) 0,5

(D) 4,9

(E) 8,5

Zadanie 3.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Weryfikowano hipotezę $H_0 : VarX_i = 4$ przy alternatywie $H_1 : VarX_i > 4$. Zakładając, że zmienne losowe X_i mają rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 wykorzystano test jednostajnie najmocniejszy na poziomie istotności 0,05.
W rzeczywistości zmienne losowe X_i mają rozkład o gęstości

$$f_c(x) = c|x|\exp(-cx^2),$$

gdzie c>0 jest nieznanym parametrem.

Wyznacz rzeczywisty rozmiar wykorzystanego testu (wybierz najlepsze przybliżenie).

A) 0,522

(B) 0,013

(C) 0,568

(D) 0,432

(E) 0,028

Zadanie 4.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,\ N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ mają rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma^2)$, gdzie $\mu = 2$ i $\sigma^2 = 4$.

Zmienna N ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 2.

Niech $S_N = \begin{cases} 0 & gdy\ N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & gdy\ N > 0 \end{cases}$.

Wtedy współczynnik asymetrii $\dfrac{E(S_N - ES_N)^3}{(VarS_N)^{3/2}}$ jest równy

(A) $\dfrac{e^{-6}}{\sqrt{2}}$

(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(C) e^6

(D) $\dfrac{e^6}{\sqrt{2}}$

(E) e^{-6}

Zadanie 5.

Niech U i V będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$. Niech $X = \max\{U,V\}$ i $Y = \min\{U,V\}$.
Wtedy

(A) $Cov(X,Y) = 0$

(B) $Cov(X,Y) = \frac{1}{36}$

(C) $Cov(X,Y) = \frac{5}{72}$

(D) $P(X + Y < 1) = \frac{1}{4}$

(E) $P(X - Y < \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

Zadanie 6.

Aby zweryfikować hipotezę, że w urnie zawierającej 8 kul są po 2 kule koloru białego, czarnego, zielonego i niebieskiego, powtórzono 8 razy eksperyment: losowano kulę, zapisywano jej kolor i z powrotem wrzucano do urny. Do tak otrzymanych danych zastosowano asymptotyczny test zgodności chi-kwadrat na poziomie istotności 0,01. Oblicz rzeczywiste prawdopodobieństwo zbioru krytycznego przy założeniu prawdziwości hipotezy.

(A) 0,0970

(B) 0,0066

(C) 0,0004

(D) 0,1697

(E) 0,0034

Zadanie 7.

W urnie znajduje się 20 kul: 10 białych i 10 czerwonych. Losujemy bez zwracania 8 kul, a następnie z pozostałych w urnie kul losujemy kolejne 6 kul. Niech S_8 oznacza liczbę wylosowanych kul białych wśród pierwszych 8 wylosowanych kul, a S_6 liczbę kul białych wśród następnych 6 kul. Oblicz $Cov(S_8, S_8 + S_6)$.

(A) $\frac{36}{19}$

(B) $-\frac{12}{19}$

(C) $\frac{12}{19}$

(D) $\frac{31}{19}$

(E) 1

Zadanie 8.

Załóżmy, że $W_1, W_2, ..., W_n, ...$ jest ciągiem zmiennych losowych takim, że

- zmienna W_1 ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$,
- dla każdej liczby naturalnej n zmienna losowa W_{n+1}, warunkowo przy danych $W_1, W_2, ..., W_n$, ma gęstość

$$\text{dla } w_{n+1} \in (0,1) \qquad f(w_{n+1} \mid w_1, ..., w_n) = \begin{cases} 1 & gdy\ w_n \le 0{,}5; \\ 3x^2 & gdy\ w_n > 0{,}5. \end{cases}$$

Wtedy $\lim_{n \to \infty} P(W_n > 0{,}25)$ jest równy

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{15}{16}$

(C) $\frac{51}{64}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{111}{128}$

Zadanie 9.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $EX_i = im$ i $VarX_i = im^2$ dla $i = 1,2,\ldots,n$, gdzie $m>0$ jest nieznanym parametrem. W klasie estymatorów parametru m postaci $\hat{m} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ (gdzie c_i są liczbami rzeczywistymi) najmniejszy błąd średniokwadratowy ma estymator, dla którego c_i są równe

(A) $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{1}{n}$

(B) $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{1}{n(n+1)+2}$

(C) $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{2}{n(n+1)+2}$

(D) $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{2}{n^2(n+1)+2}$

(E) $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{2}{n(n+1)}$

Zadanie 10.

Niech $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale (-1,1).
Wyznaczyć $E(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \mid \max(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = t)$, gdzie t jest ustaloną liczbą z przedziału (-1,1).

(A) $t - \frac{1}{n}$

(B) $\frac{(n-1)t - n - 1}{2}$

(C) $\frac{(n+2)t - n}{2}$

(D) $\frac{(n-1)t^2 + 4t - n + 1}{2}$

(E) $\frac{(n+1)t - n + 1}{2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 2011 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....K L U C Z O D P O W I E D Z I..............................

Zadanie nr	Odpowiedź
1	D
2	A
3	B
4	D
5	B
6	B
7	C
8	B
9	C
10	E