Zadanie 1.

Zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma^2)$, gdzie $\mu = 1$ i $\sigma^2 = 4$. Wyznacz $\frac{E(X - e \mid X > e)}{EX}$.

(A) 0,91

(B) 0,86

(C) 1,82

(D) 1,95

(E) 0,84

Zadanie 2.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ mają rozkłady normalne $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, zaś zmienne $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ mają rozkłady normalne $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Parametry $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ są nieznane. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ testem o obszarze krytycznym $K = \left\{ \left| \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{s} \right| > z \right\}$, gdzie $s^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - Y_i)^2$, $\overline{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$, $\overline{Y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} Y_i$. Jeśli rozmiar testu jest równy $\alpha = 0{,}05$, to z jest równe

(A) 0,705

(B) 0,754

(C) 0,362

(D) 0,602

(E) 0,576

Zadanie 3.

Zmienne losowe X_j , gdzie $j = 1,2,3,.......$ są warunkowo niezależne pod warunkiem zmiennej Θ i mają rozkłady warunkowe o wartości oczekiwanej Θ i wariancji $4\Theta^2$.
Zmienna losowa N pod warunkiem zmiennej losowej $\Lambda = \lambda$ ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ.
Zmienne ($X_1, X_2,...), N$ są niezależne. Zmienna Θ ma rozkład Gamma z parametrami (100,2), a zmienna Λ ma rozkład Gamma z parametrami (2,4). Zmienne Λ i Θ są niezależne. Wariancja zmiennej losowej

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} X_j & dla \;\; N > 0 \\ 0 & dla \;\; N = 0 \end{cases}$$

jest równa

A) 6315,625

(B) 5050,000

(C) 5065,625

(D) 6062,500

(E) 6634,375

Uwaga: Rozkład Gamma z parametrami (α, β) ma gęstość

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{gdy} \;\; x > 0 \\ 0 & \text{gdy} \;\; x \le 0 \end{cases}$$

Zadanie 4.

Dysponujemy dwiema urnami. W urnie I mamy dwie kule białe i jedną czarną, w urnie II mamy trzy kule białe i trzy czarne. Powtarzamy n razy eksperyment polegający na tym, że losujemy jedną kulę z urny I, nie oglądając jej wkładamy ją do urny II, następnie losujemy jedną kulę z urny II i nie oglądając jej wkładamy ją do urny I. Niech X_n oznacza zmienną losową równą liczbie kul białych w urnie I po n doświadczeniach. Wtedy $\lim_{n\to\infty} E(X_n X_{n+1})$ jest równa

(A) $\frac{9}{4}$

(B) $\frac{39}{14}$

(C) $\frac{65}{21}$

(D) $\frac{22}{7}$

(E) $\frac{7}{2}$

Zadanie 5.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 1$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$. Niech $Z = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ i $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Wtedy $Cov(\overline{X}, Z)$ jest równa

(A) $\dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}$

(B) $\dfrac{n}{2(n+1)(n+2)}$

(C) $\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$

(D) $\dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$

(E) $\dfrac{5}{(n+4)(n+3)(n+2)}$

Zadanie 6.

Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi spełniającymi warunki
$P(C-B)>0$ i $P(B-C)>0$ i $P(B\cap C)>0$ i $P(A|C-B)>P(A|B)$. Wtedy

(A) $P(A|B\cup C)<P(A|C)$

(B) $P(A|B\cup C)>P(A|B)$

(C) $P(A|B-C)>P(A|C-B)$

(D) $P(A|B\cap C')<P(A|B)$

(E) $P(A|B\cap C')>P(A|C)$

Zadanie 7.

Pobieramy próbkę niezależnych realizacji zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną $\lambda > 0$. Niestety sposób obserwacji uniemożliwia odnotowanie realizacji o wartości 0. Pobieranie próbki kończymy w momencie, gdy liczebność odnotowanych realizacji wynosi *n*. Tak więc, każda z naszych kolejnych odnotowanych realizacji $K_1, K_2, \ldots, K_n$ wynosi co najmniej 1 i nic nie wiemy o tym, ile w międzyczasie pojawiło się obserwacji o wartości 0. Estymujemy parametr λ za pomocą estymatora postaci

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{+\infty} iN_i ,$$

gdzie N_i jest liczbą obserwacji o wartości *i*. Błąd średniokwadratowy estymatora $\hat{\lambda}$ jest równy

(A) $\frac{\lambda}{n}(1 - e^{-\lambda})$

(B) $\frac{\lambda^2}{n}$

(C) $\frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda^2 e^{\lambda}}{n(e^{\lambda} - 1)}$

(D) $\frac{\lambda^2 + \lambda - \lambda e^{-\lambda}}{n(1 - e^{-\lambda})}$

(E) $\frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda e^{\lambda}}{n(e^{\lambda} - 1)}$

Zadanie 8.

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są dodatnimi niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa. Niech $R_0 = 0$ i $R_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, gdy $n > 0$. Niech N i M będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona, przy czym $EN = 1$ i $EM = 2$. Wtedy $P(R_{N+M} > R_N)$ jest równe

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{2}{3}(1 + 0{,}5e^{-3} - 1{,}5e^{-1})$

(C) $\frac{2}{3}(1 - e^{-3})$

(D) $\frac{2}{3}(1 - e^{-2})$

(E) $\frac{2}{3}(1 - 2e^{-3})$

Zadanie 9.

Zakładając, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_5, Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X_i, $i = 1,2,\ldots,5$, mają rozkłady normalne $N(\mu_X, 1)$, a zmienne Y_i, $i = 1,2,\ldots,5$, mają rozkłady normalne $N(\mu_Y, 2^2)$, zbudowano test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : \mu_X = \mu_Y = 0$ przy alternatywie $H_1 : \mu_X = 1$ i $\mu_Y = -1$ na poziomie istotności 0,05. W rzeczywistości zmienne losowe (X_i, Y_i), $i = 1,2,\ldots,5$, są niezależne i mają rozkłady normalne o parametrach $EX_i = \mu_X$, $EY_i = \mu_Y$, $VarX_i = 1$, $VarY_i = 4$, współczynnik korelacji $\rho(X_i, Y_i) = 0{,}5$. Przy tych warunkach moc zbudowanego testu jest równa

(A) 0,65

(B) 0,43

(C) 1

(D) 0,83

(E) 0,87

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{2^\theta \theta}{(2+x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. W oparciu o estymator największej wiarogodności T parametru θ zbudowano przedział ufności dla θ na poziomie ufności 0,95 postaci $[cT, dT]$, gdzie liczby c i d dobrano tak, aby $P_\theta(\theta < cT) = P_\theta(\theta > dT) = 0{,}025$. Liczby c i d są równe

(A) $c = 0{,}48$ i $d = 1{,}71$

(B) $c = 0{,}76$ i $d = 1{,}42$

(C) $c = 0{,}32$ i $d = 2{,}05$

(D) $c = 0{,}16$ i $d = 1{,}03$

(E) $c = 0{,}54$ i $d = 1{,}57$

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 marca 2012 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	D	
3	E	
4	C	
5	C	
6	B	
7	E	
8	C	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.