Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{\theta}-1} & \text{gdy} \quad x > 1 \\ 0 & \text{gdy} \quad x \le 1, \end{cases}$$

gdzie $\theta \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy nieobciążony estymator parametru θ postaci $T_n = aY$, gdzie $Y = \min\{\ln X_1, \ln X_2, \ldots, \ln X_n\}$ i a jest odpowiednio dobraną stałą (być może zależną od liczebności próby n).

Dla $\theta = \frac{1}{3}$ i $\varepsilon = \frac{1}{6}$ zachodzi

(A) $\lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 0$

(B) $\lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 - \exp\left(-\frac{3}{2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$

(C) $\lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 + \exp\left(-\frac{3}{2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$

(D) $\lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = \exp\left(-\frac{3}{2}\right)$

(E) $\lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1$

Zadanie 2.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są warunkowo niezależne przy znanej wartości zmiennej losowej θ i mają rozkłady o wartości oczekiwanej $E(X_i \mid \theta) = 10\theta$ i wariancji $Var(X_i \mid \theta) = 100\theta^2$. Niech N będzie zmienną losową warunkowo niezależną od $X_1, X_2, \ldots, X_n$ przy znanym θ i o warunkowym rozkładzie

$P(N = n \mid \theta) = n(1-\theta)^{n-1}\theta^2$, dla $n = 1,2,3,\ldots$.

Zmienna losowa θ ma rozkład Beta o gęstości $p(\theta) = 6\theta(1-\theta)$, gdy $\theta \in (0,1)$. Niech $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Wtedy wariancja $Var\left(\frac{S_N}{N}\right)$ jest równa

(A) 30

(B) 20,5

(C) 25

(D) 35

(E) 20

Zadanie 3.

Rozważamy model regresji liniowej postaci $Y_i = bx_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,3,4,5$, gdzie b jest nieznanym parametrem rzeczywistym, $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = \sqrt{5},\ x_4 = x_5 = 3$, a ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i nieznanej wariancji $\sigma^2 > 0$.
Hipotezę $H_0 : b = 0$ przy alternatywie $H_1 : b \neq 0$ weryfikujemy testem o obszarze krytycznym postaci $\left\{ \left| \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \right| > c \right\}$, gdzie $\hat{b}$ i $\hat{\sigma}$ są estymatorami największej wiarogodności parametrów b i σ, a stała c dobrana jest tak, aby test miał rozmiar 0,05. Stała c jest równa

A) 2,48

(B) 2,77

(C) 0,56

(D) 0,71

(E) 0,62

Zadanie 4.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $N(0,\sigma^2)$, gdzie wariancja σ^2 jest nieznana. Zakładamy, że $r = \frac{1}{\sigma^2}$ ma rozkład a priori $Gamma(\alpha,\beta)$ o gęstości

$$p(r) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} r^{\alpha-1} e^{-\beta r} & \text{gdy } r > 0 \\ 0 & \text{gdy } r \le 0 \end{cases}$$

gdzie α, β są znanymi liczbami dodatnimi.

Estymator bayesowski parametru σ^2 przy funkcji straty postaci $L(\sigma^2, a) = \frac{(\sigma^2 - a)^2}{\sigma^4}$ jest równy

(A) $$\frac{\beta + \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha + 1}$$

(B) $$\frac{\beta + \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha}$$

(C) $$\frac{\beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha - 1}$$

(D) $$\frac{\beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha}$$

(E) $$\frac{\beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha + 1}$$

Zadanie 5.

Obserwujemy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_1}, a zmienne losowe Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_2}. Dystrybuanta F_μ spełnia warunek

$$F_\mu(x) = F(x - \mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty F. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S < 10 \vee S > 17\},$$

gdzie S jest sumą rang zmiennych losowych X_1, X_2, X_3 w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący. Wyznaczyć rozmiar testu.

(A) 0,214

(B) 0,250

(C) 0,125

(D) 0,290

(E) 0,105

Zadanie 6.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ są niezależne o jednakowym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 1 i wariancji 4. Niech $S_5 = \sum_{i=1}^{5} X_i$ i $S_{20} = \sum_{i=1}^{20} X_i$. Wtedy $E\left(S_5^2 \mid S_{20} = 24\right)$ jest równa

(A) 41

(B) 76

(C) 36

(D) 51

(E) 46

Zadanie 7.

Wybieramy losowo i niezależnie dwa punkty z odcinka $[0,2\pi]$. Traktując te dwa punkty jako punkty na okręgu o promieniu 1, obliczyć wartość oczekiwaną odległości między nimi (odległość mierzymy *wzdłuż cięciwy*).

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{4}{\pi}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{4\pi + 4}{\pi^2}$

(E) 1

Zadanie 8.

Zakładając, że zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają jednakowy rozkład jednostajny na przedziale $(-\theta, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta \neq 1$ za pomocą testu jednostajnie najmocniejszego na poziomie istotności 0,2. W rzeczywistości zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne o tym samym rozkładzie o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}|x| & \text{gdy } x \in (-2,2) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo zbioru krytycznego rozważanego testu przy tym rozkładzie zmiennych X_1, X_2, X_3 jest równe

(A) 0,9969

(B) 0,9850

(C) 0,9900

(D) 0,9875

(E) 0,9994

Zadanie 9.

W urnie znajduje się trzydzieści kul, na każdej narysowana jest litera i cyfra. Mamy

10 kul oznaczonych X1
6 kul oznaczonych Y1
8 kul oznaczonych X2
6 kule oznaczone Y2.

Losujemy bez zwracania 15 kul. Niech N_{X1} określa liczbę kul oznaczonych literą X1 wśród kul wylosowanych, a N_2 liczbę kul z cyfrą 2 wśród kul wylosowanych. Obliczyć $Var(N_{X1} \mid N_2 = 5)$.

(A) $\frac{15}{16}$

(B) $\frac{400}{261}$

(C) $\frac{75}{32}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) 1

Zadanie 10.

Niech $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n > 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(1+x)^4} & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; \mathrm{x} \le 0 \end{cases}$$

Niech $U = \min\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Wtedy $Cov(U, X_0)$ jest równa

(A) $\dfrac{9n^2 + 6n - 5}{2(3n-1)(3n+2)}$

(B) $\dfrac{3}{2(3n-1)(3n+2)}$

(C) $\dfrac{3}{2(3n+1)(3n+2)}$

(D) $\dfrac{7 - 9n^2}{2(9n^2-1)(3n+2)}$

(E) $\dfrac{9n^2 + 6n - 5}{2(3n+1)(3n+2)}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 28 maja 2012 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	C	
3	E	
4	E	
5	B	
6	D	
7	B	
8	B	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.