

**Zadanie 1**

Mamy 5 niezależnych próbek z tego samego rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$  z nieznaną wartością oczekiwaną  $\mu$  i znaną wariancją  $\sigma^2$ , przy tym każda z tych próbek ma tę samą liczebność  $n$ . Dla każdej z 5 próbek oddzielnie wyznaczamy w standardowy sposób przedział ufności. Niech

$$\left[ \bar{X}_i - 0,8416\sigma/\sqrt{n}, \bar{X}_i + 0,8416\sigma/\sqrt{n} \right]$$

będzie przedziałem obliczonym na podstawie  $i$ -tej próbki.

Następnie, przedział ufności oparty na wszystkich  $5n$  obserwacjach wyznaczamy w sposób niestandardowy: za środek przedziału wybieramy *medianę*

$$m = \text{med}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4, \bar{X}_5)$$

Oblicz

$$c = \Pr\left(m - 0,8416\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq m + 0,8416\sigma/\sqrt{n}\right)$$

(z dokładnością do 0,001).

- (A)  $c = 0,942$
- (B)  $c = 0,884$
- (C)  $c = 0,995$
- (D)  $c = 0,987$
- (E)  $c = 0,800$

**Zadanie 2**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{gdy } x \in (0;1) \\ 0 & \text{gdy } x \notin (0;1). \end{cases}$$

Niech  $T_n = \prod_{i=1}^n X_i^{\frac{3}{n}}$ .

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{(T_n - e)\sqrt{n} > 2e\} = 0,023$

(B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|T_n - e^{-1}| \sqrt{n} > e\} = 0,32$

(C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{T_n < e^{-1}\} = 1$

(D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|T_n - e^{-1}| \sqrt{n} > 2e^{-1}\} = 0,046$

(E)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{(T_n - e)\sqrt{n} > 2e^{-1}\} = 0,023$

**Zadanie 3**

Założmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją  $X$  z rozkładu Laplace'a  $L(\mu, \lambda)$  o gęstości

$$f_{\mu, \lambda}(x) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\lambda}\right),$$

gdzie  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  są nieznanymi parametrami.

Rozważmy zadanie testowania hipotezy

$$H_0: \mu = 1 \quad i \quad \lambda = 2$$

przeciw alternatywie

$$H_1: \mu = 2 \quad i \quad \lambda = 1.$$

Najmocniejszy test na pewnym poziomie istotności jest postaci

$$\text{Odrzuć } H_0, \text{ gdy } x \in \left(\frac{5}{3}, b\right).$$

Moc tego testu jest równa

- (A) 0,642
- (B) 0,458
- (C) 0,542
- (D) 0,358
- (E) 0,858

**Zadanie 4**

Zmienne losowe  $N, Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$  i  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n), \dots$  są niezależne. Każda ze zmiennych losowych  $Z_i$  ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa jednostajny na przedziale  $(0,1)$ . Każda ze zmiennych losowych  $(X_i, Y_i)$  ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że  $EX_i = EY_i = 3$  i  $VarX_i = VarY_i = 2$  i współczynnik korelacji  $Corr(X_i, Y_i) = 0,5$ . Zmienna losowa  $N$  ma rozkład ujemny dwumianowy postaci

$$P(N = n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad \text{gd } n = 0, 1, 2, \dots$$

Niech  $S_N = \sum_{i=1}^N Z_i X_i$  i  $T_N = \sum_{i=1}^N Z_i Y_i$ , gdy  $N > 0$ . Gdy  $N = 0$ , to  $S_N = T_N = 0$ .

Wtedy wariancja zmiennej  $W = S_N + T_N$  jest równa

- (A) 18
- (B) 12,5
- (C) 17
- (D) 9
- (E) 10

**Zadanie 5**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_6, Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Osobno, na podstawie prób losowych  $X_1, X_2, \dots, X_6$  i  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$ , wyznaczono estymatory największej wiarygodności  $T_X$  i  $T_Y$  parametru  $\theta$ .

Prawdopodobieństwo  $P(T_X < T_Y)$  jest równe

- (A) 0,4827
- (B) 0,5247
- (C) 0,5173
- (D) 0,4753
- (E) 0,4649

**Zadanie 6**

Niech  $(X, Y)$  będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{gdy } x > 0 \text{ i } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Niech  $Z = \frac{Y}{X}$  i  $V = X^2 + Y^2$ . Wtedy łączny rozkład zmiennych  $Z, V$  jest taki, że

- (A)  $EZ = 0$
- (B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej  $Z$  wyraża się wzorem
$$g(z) = \frac{2}{\pi(1+z^2)} \text{ dla } z \in (0, +\infty)$$
- (C) mediana rozkładu brzegowego zmiennej  $Z$  jest równa  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (D) zmienne  $Z$  i  $V$  są zależne
- (E) kwantyl rzędu 0,25 rozkładu brzegowego zmiennej  $Z$  jest równy  $-1$ .

**Zadanie 7**

Założmy, że  $X_1, \dots, X_n, \dots$  jest ciągiem niezależnych, dodatnich zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = x \exp(-x) \quad \text{dla } x > 0.$$

Niech  $S_0 = 0$  i  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  dla  $n > 0$ . Określmy zmienną losową  $N$  w następujący sposób:

$$N = \max \{n \geq 0 : S_n \leq 4\}$$

Oblicz  $P(N = 2)$ .

(A)  $\frac{16}{15} e^{-1}$

(B)  $\frac{128}{15} e^{-4}$

(C)  $\frac{96}{5} e^{-4}$

(D)  $\frac{64}{5} e^{-4}$

(E)  $\frac{16}{15} e^{-2}$

**Zadanie 8**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_{12}$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym  $N(m, 2)$ . Parametr  $m$  jest nieznanym i jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie normalnym  $N(1, 4)$ . Wyznaczamy estymator bayesowski parametru  $m$  przy funkcji straty LINEX danej wzorem

$$L(m, a) = e^{m-a} - (m - a) - 1,$$

gdzie  $a$  oznacza wartość estymatora.

Wtedy ryzyko a posteriori estymatora bayesowskiego jest równe

- (A) 1,125
- (B) 0,160
- (C) 0,040
- (D) 0,080
- (E) 0,842



**Zadanie 9**

Obserwujemy niezależne zmienne losowe  $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$ . Zmienne losowe  $X_1, X_2, X_3, X_4$  mają ten sam rozkład o dystrybuancie  $F_{\mu_1}$ , a zmienne losowe  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$  mają ten sam rozkład o dystrybuancie  $F_{\mu_2}$ . Dystrybuanta  $F_{\mu}$  spełnia warunek

$$F_{\mu}(x) = F(x - \mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty  $F$ . Weryfikujemy hipotezę  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  przy alternatywie  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$  stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S \geq 19\},$$

gdzie  $S$  jest sumą rang tych spośród zmiennych  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący, które są większe od  $\max\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$ . Wyznaczyć rozmiar testu.

- (A)  $\frac{14}{105}$
- (B)  $\frac{9}{70}$
- (C)  $\frac{29}{210}$
- (D)  $\frac{13}{105}$
- (E)  $\frac{1}{7}$

**Zadanie 10**

Łańcuch Markowa ma trzy stany:  $E_1, E_2, E_3$ , i macierz przejścia

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Niech  $X_n$  oznacza stan, w którym znajduje się łańcuch po dokonaniu  $n$  kroków,  $n = 0, 1, \dots$ . Funkcję  $f$  na zbiorze stanów określamy wzorem:  $f(E_i) = i - 1$  dla  $i = 1, 2, 3$ .

Niech  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}[f(X_n), f(X_{n+1})]$ . Granica  $c$  jest równa

- (A)  $\frac{224}{625}$
- (B)  $0$
- (C)  $\frac{50}{625}$
- (D)  $\frac{49}{625}$
- (E)  $\frac{74}{625}$

**Egzamin dla Aktuariuszy z 8 grudnia 2014 r.****Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel.....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja <sup>♦</sup>
1	B	
2	D	
3	B	
4	C	
5	A	
6	E	
7	C	
8	D	
9	A	
10	E	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.