

Zadanie 1.

Urna zawiera 5 kul o numerach: 0, 1, 2, 3, 4. Z urny ciągniemy kulę, zapisujemy numer i kulę wrzucamy z powrotem do urny. Czynność tę powtarzamy, aż kula z każdym numerem zostanie wyciągnięta co najmniej raz. Oblicz wartość oczekiwaną liczby powtórzeń.

(A) 17

(B) 21

(C) $10\frac{5}{12}$

(D) $7\frac{5}{12}$

(E) $11\frac{5}{12}$

Zadanie 2.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy estymator T_n parametru θ postaci

$$T_n = (n+1) \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Jeżeli $\theta = 1$, to dla każdego $\varepsilon \in (0, 1)$ granica $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - 1| > \varepsilon)$ jest równa

- (A) 0
- (B) $1 - e^{\varepsilon-1} + e^{-\varepsilon-1}$
- (C) 1
- (D) $1 - e^{\varepsilon-1}$
- (E) $1 - e^{\varepsilon-1} - e^{-\varepsilon-1}$

Zadanie 3.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej 0 i nieznannej wariancji σ^2 . Rozważamy estymatory odchylenia standardowego σ postaci $\hat{\sigma}_c = c \sum_{i=1}^n |X_i|$. Niech $\hat{\sigma}_{\bar{c}}$ oznacza estymator o najmniejszym błędzie średniokwadratowym w klasie rozważanych estymatorów. Wtedy \bar{c} jest równe

A) $\frac{2\sqrt{2\pi}}{2\pi + n - 1}$

(B) $\frac{1}{n-1}$

(C) $\frac{1}{n}$

(D) $\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi + 2n - 2}$

(E) $\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi + 2n}$

Zadanie 4.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots, N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1.

Zmienne $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ mają rozkład dwupunktowy $P(I_i = 1) = 1 - P(I_i = 0) = \frac{1}{2}$.

Zmienna N ma rozkład ujemny dwumianowy $P(N = n) = \binom{n+1}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Niech } S_N = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N = 0 \\ \sum_{i=1}^N I_i X_i & \text{gdy } N > 0 \end{cases}.$$

Wtedy współczynnik zmienności $\frac{\sqrt{\text{Var}(S_N)}}{ES_N}$ jest równy

(A) $\sqrt{\frac{9}{2}}$

(B) $\sqrt{\frac{7}{2}}$

(C) $\sqrt{\frac{13}{2}}$

(D) $\sqrt{\frac{7}{6}}$

(E) $\sqrt{\frac{17}{2}}$

Zadanie 5.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładów o gęstościach

$$f_X(x) = \begin{cases} 32x^2 e^{-4x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$
$$f_Y(x) = \begin{cases} 16x e^{-4x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wtedy $E(X - Y | X + Y = s)$ jest równa

- (A) 0
- (B) $\frac{1}{4}s$
- (C) $\frac{1}{5}s$
- (D) $\frac{2}{5}s$
- (E) $\frac{3}{4}s$

Zadanie 6.

Niech X_1, X_2, \dots, X_8 będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa Pareto o dystrybuancie

$$F_{\theta}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^{\theta}} & \text{dla } x \geq 1; \\ 0 & \text{dla } x < 1, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Rozpatrzmy zadanie testowania hipotezy $H_0 : \theta = 4$ przeciwko alternatywie

$H_1 : \theta = 2$. Zbudowano taki test, dla którego *suma* prawdopodobieństw błędów I i II rodzaju, oznaczanych odpowiednio przez α i β , jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość $\alpha + \beta$.

- (A) 0,2668
- (B) 0,3336
- (C) 0,8075
- (D) 0,1000
- (E) 0,3667

Zadanie 7.

Niech X_1, X_2, \dots, X_{10} będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o nieznanym medianie m . Budujemy przedział ufności dla parametru m postaci $[X_{3:10}, X_{7:10}]$, gdzie $X_{k:10}$ oznacza k -tą statystykę pozycyjną z próby X_1, X_2, \dots, X_{10} . Prawdopodobieństwo $P(m \in [X_{3:10}, X_{7:10}])$ jest równe

(A) $\frac{114}{128}$

(B) $\frac{121}{128}$

(C) $\frac{99}{128}$

(D) $\frac{115}{128}$

(E) $\frac{120}{128}$

Zadanie 8.

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Weibulla o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 3\theta x^2 \exp(-\theta x^3) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Niestety nie obserwujemy zmiennej X , ale zmienną Y równą $X - 1$, gdy $X > 1$. W wyniku tych obserwacji otrzymujemy prostą próbę losową Y_1, Y_2, \dots, Y_{10} (nie wiemy ile razy pojawiły się wartości zmiennej X z przedziału $(0, 1]$) i na jej podstawie wyznaczamy estymator największej wiarygodności $\hat{\theta}$ parametru θ .

Dobierz stałą c tak, aby zachodziła równość

$$P_{\theta}(\theta < c\hat{\theta}) = 0,95$$

- (A) 6,28
- (B) 1,83
- (C) 3,14
- (D) 1,57
- (E) 3,06

Zadanie 9.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_0 = 2$ oraz niech dla $n = 1, 2, 3, \dots$ zachodzi

$$Y_n = \begin{cases} 4 & \text{gdy } X_n = 4 \\ \min(Y_{n-1}, X_n) & \text{gdy } X_n < 4 \end{cases}$$

Oblicz $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq 3)$

- (A) $\frac{1}{3}$
- (B) $\frac{3}{4}$
- (C) $\frac{1}{4}$
- (D) $\frac{1}{2}$
- (E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 10.

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (niełosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, gdzie błędy ε_i są niezależne i mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1. Obserwujemy zmienne losowe Y_1, Y_2, \dots, Y_n przy danych wartościach x_1, x_2, \dots, x_n . Test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy

$$H_0 : \beta_0 = 0 \text{ i } \beta_1 = 1$$

przy alternatywie

$$H_1 : \beta_0 = -1 \text{ i } \beta_1 = 2$$

na poziomie istotności 0,05 odrzuca hipotezę H_0 , gdy spełniona jest nierówność

$$(A) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - x_i)(x_i - 1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (1 - x_i)^2}} > 1,645$$

$$(B) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - 1)(x_i - 1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (1 - x_i)^2}} > 1,645$$

$$(C) \quad \frac{\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - 1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (1 - x_i)^2}} > 1,645$$

$$(D) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - x_i)(1 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (1 - x_i)^2}} > 1,645$$

$$(E) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - 1)(1 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (1 - x_i)^2}} > 1,645$$

Egzamin dla Aktuariuszy z 20 czerwca 2011 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkuszu odpowiedzi***

Imię i nazwisko :KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	E	
2	B	
3	D	
4	C	
5	C	
6	B	
7	C	
8	D	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.